UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Laurea in Matematica

GEOMETRIA 1

Prova scritta del 19-9-2006 - a.a. 2005-2006

*Cognome*____________________ *Nome*__________________________

*Numero di matricola*____________________

Avvertenze:

1. Per il primo esonero svolgere gli esercizi 1,2,3,4;
2. Per il secondo esonero svolgere gli esercizi 5,6,7,8;
3. Per lo scritto svolgere gli esercizi 1,2,4,5,7,8;
4. Barrare la casella "scritto" o la casella "esonero" a seconda di quale opzione si vuole esercitare (una sola scelta è possibile);
5. Una volta consegnato per lo scritto si **cancella** un eventuale voto di esonero; analogamente una volta consegnato per un esonero si **cancella** il voto dell'esonero;
6. Svolgere ogni esercizio nello spazio assegnato, senza consegnare altri fogli e giustificando tutte le affermazioni fatte. Non è consentito l'uso di libri nè appunti.

Da valutare come: **scritto** ◯ **primo esonero** ◯ **secondo esonero** ◯

Valutazione

1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
Totale scritto	
Totale primo esonero	
Totale secondo esonero	

1. (a) Si definiscano rango e determinante di una matrice;

(b) si enunci il risultato che relaziona rango, determinante ed invertibilità di una matrice;

(c) si dimostri tale risultato.

2. Determinare per quali valori $h \in \mathbb{R}$, è (o no) compatibile il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} X_1 + hX_2 + hX_3 + X_4 = 0 \\ hX_1 + X_3 + X_4 = 1 \\ X_1 + hX_3 - hX_4 = 0 \\ X_1 - hX_2 + X_3 = 0 \end{cases}$$

e calcolarne esplicitamente le soluzioni, utilizzando esclusivamente operazioni elementari.

3. Siano a e b due numeri reali e si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & -1 \\ 1 & 1 & b \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si determinino i valori di a e b per i quali A è (o no) invertibile e, in tal caso, si calcoli, con sole operazioni elementari, l'inversa.

4. Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione 4 con base $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ e siano

$$v_1 = e_1 + e_2 - e_4, v_2 = e_1 + e_2 - e_3 + e_4, v_3 = 2e_1 + 4e_2 + 3e_3 - 2e_4, v_4 = 4e_2 + 2e_3.$$

(a) Sia $U =< v_1, v_2, v_3, v_4 >$ il sottospazio generato da essi. Si calcoli la dimensione di U;

(b) si determini un sottospazio W di V tale che

$$U \oplus W = V;$$

(c) Sia k un numero reale e siano

$$u_k = ke_1 - e_3, v_k = e_1 + ke_2.$$

Si determinino (se esistono) i valori di k per i quali $dim U \cap < u_k, v_k >= 1$.

5. Sia A uno spazio affine di dimensione n, sia $O, e_1, e_2, \ldots, e_n$, un riferimento affine.

(a) Si definisca la nozione di parallelismo tra due sottospazi affini di A;

(b) sia $n = 3$ e siano r una retta e p un piano in A. Si enunci la proposizione che caratterizza il parallelismo o l'incidenza di r e p in funzione delle loro equazioni;

(c) si dimostri tale proposizione.

6. In uno spazio affine di dimensione 3 sia O, e_1, e_2, e_3, un riferimento affine e si considerino le due rette di equazioni parametriche seguenti:

$$\mathcal{R}_1 : \begin{cases} x = t+1 \\ y = 1 \\ z = t \end{cases}, \mathcal{R}_2 : \begin{cases} x = 1+s \\ y = 3s \\ z = s-1 \end{cases}.$$

(a) Esiste un piano che contiene tutte e due le rette?

(b) Determinare (se esistono) tutte le coppie di punti $P_1 \in \mathcal{R}_1, P_2 \in \mathcal{R}_2$ tali che P_1, P_2 e $P_3 = (1, 0, 1)$ sono allineati.

7. Sia k un numero reale e si considerino l'applicazione lineare $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita da $F(x, y) = (3x - y, kx + y)$ e la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Si determini se esistono valori di k tali che $\mathbb{R}^2/N(F)$ ha dimensione 1, e per un tale k, si determini una base di $\mathbb{R}^2/N(F)$;

(a) si determini se esistono valori di k tali che A è la matrice di F in qualche base di $\mathbb{R}^2$.

8. Sia m un numero reale ed $A \in M_4$ la seguente matrice: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & m+1 \\ 0 & 0 & 0 & m \end{pmatrix}$.

(a) Calcolare il polinomio caratteristico di A;

(b) Determinare per quali valori di m la matrice A è diagonalizzabile;

(c) Per almeno un valore trovato in (b) trovare una matrice $M \in GL_4$ tale che $M^{-1}AM$ è diagonale.