UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Laurea in Matematica

GEOMETRIA 1

Prova scritta del 20-6-2006 - a.a. 2005-2006

*Cognome*__________________ *Nome*________________________

*Numero di matricola*__________________

Avvertenze:

1. Per il primo esonero svolgere gli esercizi 1,2,3,4;
2. Per il secondo esonero svolgere gli esercizi 5,6,7,8;
3. Per lo scritto svolgere gli esercizi 1,2,4,5,7,8;
4. Barrare la casella "scritto" o la casella "esonero" a seconda di quale opzione si vuole esercitare (una sola scelta è possibile);
5. Una volta consegnato per lo scritto si **cancella** un eventuale voto di esonero; analogamente una volta consegnato per un esonero si **cancella** il voto dell'esonero;
6. Svolgere ogni esercizio nello spazio assegnato, senza consegnare altri fogli e giustificando tutte le affermazioni fatte. Non è consentito l'uso di libri nè appunti.

Da valutare come: **scritto** ◯ **primo esonero** ◯ **secondo esonero** ◯

Valutazione

1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
Totale scritto	
Totale primo esonero	
Totale secondo esonero	

1. Sia V uno spazio vettoriale, U, W due suoi sottospazi.

(a) Si enunci il risultato che relaziona le dimensioni di $U \cap W$ e di $U + W$.

(b) Si dimostri tale risultato.

2. Determinare per quali valori $h \in \mathbb{R}$, è (o no) compatibile il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} X_1 + hX_2 + X_4 = 0 \\ hX_1 + hX_3 + X_4 = 1 \\ -X_1 + X_3 - hX_4 = 0 \\ hX_1 + X_2 + X_3 = 0 \end{cases}$$

e calcolarne esplicitamente le soluzioni, utilizzando esclusivamente operazioni elementari.

3. Sia a un numero reale e si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & a & 1 \end{pmatrix}.$$

Si determinino i valori di a per i quali A si può esprimere come prodotto di matrici elementari e si scriva esplicitamente tale prodotto.

4. Sia k un numero reale e si considerino i seguenti vettori di $\mathbb{R}^4$:

Siano $w_1 = (1, 0, 2, -1), w_2 = (0, 0, 2, 1), w_3 = (k, 0, 2k, 1), w_4 = (1, 1, 1, 1)$,

$u_1 = (1, 0, 1, 1), u_2 = (1, 2, 0, 2), u_3 = (-1, 2, -2, 0), u_4 = (k, 1, 0, 1)$ ed i sottospazi

$U =< u_1, u_2, u_3, u_4 >, W =< w_1, w_2, w_3, w_4 >$.

(a) Determinare $\dim U$, $\dim W$ ed una base per U e per W.

(b) Determinare $U \cap W$ ed una sua base.

(c) Determinare (se esistono) tutti i sottospazi L di dimensione 2 di $\mathbb{R}^4$ tali che

$$U \cap W + L \neq R^4.$$

5. (a) Si definiscano le nozioni di spazio e sottospazio affine;

(b) si enunci il risultato che relaziona l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare con i sottospazi affini;

(c) si dimostri tale risultato.

6. Sia A uno spazio affine di dimensione 3 su uno spazio vettoriale reale V e sia Oe_1, e_2, e_3 un riferimento affine.

Siano p il piano di equazione $2X - Y + Z = 0$ e r la retta di equazioni $\begin{cases} X - Y + Z = 0 \\ Y = 0 \end{cases}$.

(a) Determinare (se esistono) tutte le rette $s \subset p$ tali che s passa per il punto $A(1, 1, -1)$ ed s è parallela ad r.

(b) Determinare (se esistono) tutti i piani q tali che q non è parallelo a p e non esistono rette contenute in q e complanari con r.

7. Siano V e W due spazi vettoriali reali, $F : V \to W$ un'applicazione lineare. Siano $U \subset V$ un sottospazio tale che $V = N(F) \oplus U$ e $G : U \to Im(F)$ l'applicazione lineare definita da $G(u) = F(u)$ per ogni $u \in U$.

(a) Dimostrare che G è suriettiva;

(b) Dimostrare che G è un isomorfismo;

(c) U è isomorfo a $V/N(F)$?

8. Sia a un numero reale e si consideri la seguente matrice: $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & a \end{pmatrix}$.

(a) Calcolare il polinomio caratteristico di A;

(b) trovare basi per gli autospazi di A;

(c) determinare i valori di a per i quali A è diagonalizzabile.