Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica
Tutorato di GE1 - A.A. 2005/2006
Docente: Prof. A. F. Lopez - Esercitatore: Dott. V. Talamanca
Tutori: Dott. Andrea Agnesse & Dott. Nazareno Maroni
Sito: ***http://andynaz.altervista.org/didattica.htm***

Tutorato n.3 del 16/3/2006

0. Data una matrice quadrata $\mathcal{A} = (a_{ij})$ si definisce la sua *traccia* come la somma degli elementi sulla diagonale: $tr(\mathcal{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.
   Siano $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in M_n$; dimostrare che $tr(\mathcal{AB}) = tr(\mathcal{BA})$. Se poi $\mathcal{B}$ è invertibile, dimostrare che $tr(\mathcal{B}^{-1}\mathcal{AB}) = tr(\mathcal{A})$.

1. Per ognuna delle seguenti coppie di insiemi, dire se il primo è uno spazio vettoriale sul secondo (dove non altrimenti specificato, si intendono la somma e il prodotto usuali).
   (a) $(\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2)$, dove $(\mathcal{K}_1, \oplus, \otimes)$ è un campo e $\mathcal{K}_2 \subseteq \mathcal{K}_1$ è un suo sottocampo
   (b) $(\mathbb{Q}, \mathbb{R})$
   (c) $(C_{[a,b]}, \mathbb{R})$ con $C_{[a,b]} = \{f(x) : [a,b] \to \mathbb{R} \mid f(x)$ é continua$\}$, con $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ e $(c \cdot f)(x) = c^3 \cdot f(x)$
   (d) $(M_n(\mathbb{Z}_3), \mathbb{Z}_3)$ dove $\mathbb{Z}_3 = \frac{\mathbb{Z}}{3\mathbb{Z}}$
   (e) $(\{M_n = -\,{}^tM_n\}, \mathbb{R})$

2. Dati $\mathcal{V}$ spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ e $\mathcal{W}_1$ e $\mathcal{W}_2$ suoi sottospazi vettoriali, dimostrare che $\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2 = \{u_1 + 2u_2 \mid u_1 \in \mathcal{W}_1 \text{ e } u_2 \in \mathcal{W}_2\}$ è un sottospazio vettoriale.

3. Data $\mathcal{A} \in M_n$ simmetrica e invertibile; verificare se anche l'inversa è simmetrica.

4. Risolvere i seguenti sistemi:
   (a) $$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_5 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + 3x_4 = 1 \\ -x_1 + x_4 - x_5 = -1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 - 3x_2 + x_5 = 1 \end{cases}$$

(b) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 1 \\ -x_1 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 - 3x_4 = -1 \end{cases}$

5. Dire quali dei seguenti insiemi di vettori di $\mathbb{R}^3$ sono indipendenti; se possibile poi trovare i coefficienti di una combinazione lineare che dà come risultato $(1, 1, 0)$.
   (a) $(-1, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$, $(1, 1, 1)$
   (b) $(\frac{1}{2}, -1, 0)$, $(\sqrt[4]{3}, -3, \pi)$, $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 2)$, $(0, 0, \frac{2}{3})$
   (c) $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}, -\sqrt{2})$, $(-1, -1, 1)$, $(0, 1, 0)$
   (d) $(-2, 3, 5)$, $(1, 1, -1/2)$

6. Determinare se i seguenti vettori u, v e w sono fra loro linearmente indipendenti; nei casi in cui non lo siano scriverne uno come combinazione lineare degli altri.
   (a) $u = (1, 0, 1)$, $v = (1, 2, 3)$, $w = (3, 2, 5)$
   (b) $u = (1, 0, 1)$, $v = (1, 1, 1)$, $w = (0, 1, 1)$
   (c) $u = (1, 2)$, $v = (1, -1)$, $w = (2, 5)$
   (d) $u = (1, 0, 0, 1)$, $v = (0, 1, 2, 1)$, $w = (1, 2, 3, 4)$
   (e) $u = (1, 0, 0, 1)$, $v = (0, 1, 2, 1)$, $w = (1, 2, 4, 3)$