Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica
Tutorato di GE1 - A.A. 2005/2006
Docente: Prof. A. F. Lopez - Esercitatore: Dott. V. Talamanca
Tutori: Dott. Andrea Agnesse & Dott. Nazareno Maroni
Sito: *http://andynaz.altervista.org/didattica.htm*

Soluzioni del tutorato n.3 del 16/3/2006

0. Sia $\mathcal{A} = (a_{ij})$ e $\mathcal{B} = (b_{ij})$; allora

$$tr(\mathcal{AB}) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{k=0}^{n} a_{ik}b_{ki} \quad \text{e} \quad tr(\mathcal{BA}) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{k=0}^{n} b_{ik}a_{ki}$$

A questo punto basta scambiare le sommatorie per avere l'ugualianza.
Sia ora $\mathcal{B}$ invertibile e chiamiamo $\mathcal{C} = \mathcal{AB}$; per quanto appena dimostrato

$$tr(\mathcal{CB}^{-1}) = tr(\mathcal{B}^{-1}\mathcal{C}) \Rightarrow tr(\mathcal{ABB}^{-1}) = tr(\mathcal{B}^{-1}\mathcal{AB}) \Rightarrow tr(\mathcal{A}) = tr(\mathcal{B}^{-1}\mathcal{AB})$$

1. (a) È uno spazio vettoriale; infatti gli elementi di $\mathcal{K}_1$ soddisfano tutte le SVx proprietà, e gli elementi di $\mathcal{K}_2$ sono anche elementi di $\mathcal{K}_1$.
   (b) Non è uno spazio vettoriale, infatti se prendiamo come scalare $\sqrt[3]{2} \in \mathbb{R}$ e come vettore $1 \in \mathbb{Q}$, quello che otteniamo è $\sqrt[3]{2} \cdot 1 = \sqrt[3]{2} \notin \mathbb{Q}$.
   (c) Non è uno spazio vettoriale: notiamo infatti che la proprietà SV6 non è soddisfatta: dovrebbe essere infatti $(k + h)v = kv + hv$ per ogni vettore v e k e h scalari (in questo caso si intende che le due funzioni debbano essere uguali, ovvero che i loro valori coicidano in ogni punto), mentre
      - $((k + h)v)(x) = (k + h)^3v(x)$
      - $(kv + hv)(x) = k^3v(x) + h^3v(x)$

      i cui valori in generale non coincidono per ogni punto $x \in [a, b]$.
   (d) È uno spazio vettoriale.
   (e) È uno spazio vettoriale: infatti $M_n(\mathbb{R})$ è uno spazio vettoriale, per cui basta far vedere che lo $\mathbf{0}$ è una matrice antisimmetrica e che date $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ matrici antisimmetriche e $c \in \mathbb{R} \Rightarrow \mathcal{A} + \mathcal{B}$ e $c\mathcal{A}$ sono antisimmetriche:
      - $\mathbf{0}$ è la matrice nulla, che è antisimmetrica;
      - $\mathcal{A} = (a_{ij})$ e $\mathcal{B} = (b_{ij})$ antisimmetriche $\Rightarrow a_{ij} = -a_{ji}$ e $b_{ij} = -b_{ji} \Rightarrow$ $(\mathcal{A} + \mathcal{B})_{ij} = a_{ij} + b_{ij} = -a_{ji} - b_{ji} = -(a_{ji} + b_{ji}) = -(\mathcal{A} + \mathcal{B})_{ji} \Rightarrow \mathcal{A} + \mathcal{B}$ è antisimmetrica;
      - $\mathcal{A} = (a_{ij})$ è antisimmetrica e $c \in \mathbb{R}$, $a_{ij} = -a_{ji} \Rightarrow ca_{ij} = -ca_{ji}$ dunque $c\mathcal{A}$ è antisimmetrica.
2. Per far vedere che $\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2$ è un sottospazio vettoriale usiamo la caratterizzazione usata nell'esercizio 5(e):

- sappiamo che $\mathbf{0} \in \mathcal{W}_1$ e $\mathbf{0} \in \mathcal{W}_2$, in quanto $\mathcal{W}_1$ e $\mathcal{W}_2$ sottospazi vettoriali di $\mathcal{V}$, dunque $\mathbf{0} + 2 \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0} \in \mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2$;
- $a, b \in \mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2 \Rightarrow \exists\, a_1, b_1 \in \mathcal{W}_1$ e $a_2, b_2 \in \mathcal{W}_2 \mid a = a_1 + 2a_2$ e $b = b_1 + 2b_2 \Rightarrow a + b = (a_1 + 2a_2) + (b_1 + 2b_2) =$ [1] $\underbrace{(a_1 + b_1)}_{\in \mathcal{W}_1} + 2\underbrace{(a_2 + b_2)}_{\in \mathcal{W}_2} \in \mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2$;
- $a \in \mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2,\ c \in \mathbb{R} \Rightarrow ca = c(a_1 + 2a_2) = \underbrace{ca_1}_{\in \mathcal{W}_1} + 2\underbrace{ca_2}_{\in \mathcal{W}_2} \in \mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2$

3. Sappiamo che $\mathcal{A}^t = \mathcal{A}$; $\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1} = \mathbb{I}_n \Rightarrow (\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1})^t = (\mathbb{I}_n)^t = \mathbb{I}_n \Rightarrow (\mathcal{A}^{-1})^t\mathcal{A} = \mathbb{I} \Rightarrow (\mathcal{A}^{-1})^t = \mathcal{A}^{-1}$

4. (a) $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 3 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1-\frac{1}{2} & -1 & \\ 0 & \frac{5}{2} & -1 & -1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \to$
$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 3 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{8}{5} & -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ 0 & 0 & -1 & -\frac{5}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 3 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -\frac{5}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{8}{5} & -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \to$
$\to \begin{cases} x_1 = \frac{7}{2} \\ x_2 = \frac{3}{4} \\ x_3 = \frac{33}{8} \\ x_4 = -\frac{5}{4} \\ x_5 = -2 \end{cases}$

   (b) $\exists!$ soluzione: $(\frac{3}{25}, \frac{17}{25}, \frac{18}{25}, \frac{3}{5})$

5. (a) indipendenti; $(a, b, c) = (0, -1, 1)$
   (b) dipendenti; $(a, b, c) = (-\frac{5}{2}, -\frac{9}{2}, \frac{27}{2})$
   (c) indipendenti; $(a, b, c) = (-\sqrt{2}, -2, 1)$
   (d) indipendenti; $\nexists(a, b)$

6. (a) $w = 2u + v$
   (b) indipendenti
   (c) $w = 3u - v$
   (d) indipendenti
   (e) $w = u + 2v$

[1] uso la proprietà commutativa di $\mathcal{V}$