Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica
Tutorato di GE1 - A.A. 2005/2006
Docente: Prof. A. F. Lopez - Esercitatore: Dott. V. Talamanca
Tutori: Dott. Andrea Agnesse & Dott. Nazareno Maroni
Sito: *http://andynaz.altervista.org/didattica.htm*

Tutorato n.4 del 23/3/2006

0a. Esprimere, se possibile, le seguenti matrici come somma di una matrice simmetrica e di una antisimmetrica:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} e & -2 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & \sqrt{2} & 0 \\ i & -1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \pi & -\frac{2}{3} & -5 \end{pmatrix}$$

0b. Dimostrare che ogni matrice $\mathcal{A} \in M_n$ è esprimibile come somma di una matrice simmetrica e di una antisimmetrica.
È vero anche per matrici non quadrate??

1. Dire se le seguenti matrici sono ortogonali.

$$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathcal{D} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \end{pmatrix}$$

2. Risolvere i seguenti sistemi:

(a) $$\begin{cases} -x_1 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 1 \\ x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 1 \end{cases}$$

(b) $$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_5 = -1 \\ -3x_2 + 4x_3 - x_4 + x_5 = 2 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + 2x_5 = 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = -2 \end{cases}$$

(c) $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 1 \\ 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 1 \\ \frac{3}{2}x_1 + x_2 - x_3 + \frac{7}{2}x_4 - 2x_5 = \frac{1}{2} \\ x_1 - x_3 + 2x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_4 - 2x_5 = 1 \end{cases}$

3. Determinare, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, il numero di soluzioni del seguente sistema:
$$\begin{cases} x + ky = -2 \\ kx + 3y - 3z = 0 \\ 2x - kz = -4 \end{cases}$$

4. Dire per le seguenti coppie di $\mathcal{W}_1$ e $\mathcal{W}_2$ se i vettori che li generano sono linearmente dipendenti o indipendenti, determinare la loro dimensione e trovarne una base. Dire, giustificando la risposta, se $\mathcal{V} = \mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2$ è somma diretta, determinare $dim_{\mathbb{R}}\mathcal{V}$ e scrivere una sua base. Se $dim(\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2) \geqslant 1$ determinarne una base.
   (a) $\mathcal{W}_1 =< (1, \frac{1}{2}, 0, -1), (\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, 3, \frac{3}{2}), (-1, 0, 3, 1) >$
   $\mathcal{W}_2 =< (0, 1, 0, -1), (0, -1, 0, -1), (1, 0, 2, -3) >$
   (b) $\mathcal{W}_1 =< (1, 0, -1, 1), (1, 0, -2, 1), (-1, 1, 1, -2) >$
   $\mathcal{W}_2 =< (0, 0, 1, 0), (0, 1, 1, -1) >$
   (c) $\mathcal{W}_1 =< (1, 0, -1, -2), (0, -1, -2, -2), (1, 1, 1, 0) >$
   $\mathcal{W}_2 =< (1, 0, 0, 1), (1, -1, 0, 2), (0, 1, 0, -1) >$