Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica
Tutorato di GE1 - A.A. 2005/2006
Docente: Prof. A. F. Lopez - Esercitatore: Dott. V. Talamanca
Tutori: Dott. Andrea Agnesse & Dott. Nazareno Maroni
Sito: *http://andynaz.altervista.org/didattica.htm*

Soluzioni del tutorato n.4 del 23/3/2006

0. È facile far vedere che, data $\mathcal{A} \in M_n$, $\mathcal{A} = \mathcal{A}_s + \mathcal{A}_a$, con $\mathcal{A}_s = \frac{\mathcal{A}+\mathcal{A}^t}{2} \in M_n$ simmetrica e $\mathcal{A}_a = \frac{\mathcal{A}-\mathcal{A}^t}{2} \in M_n$ antisimmetrica.
   Questo risultato non è vero per le matrici non quadrate, in quanto le matrici simmetriche e antisimmetriche sono quadrate, e dunque le loro combinazioni lineari sono quadrate!!

1. Sono entrambe ortogonali (per farlo vedere, invece di calcolarsi l'inversa, è più semplice verificare che $\mathcal{C}\mathcal{C}^t = \mathbb{I}_n$ e $\mathcal{D}\mathcal{D}^t = \mathbb{I}_n$).

2. (a) incompatibile
   (b) $\exists!$ soluzione $(-\frac{61}{26}, \frac{16}{13}, \frac{12}{13}, -\frac{25}{26}, \frac{27}{26})$
   (c) $\exists\ \infty^3$ soluzioni del tipo $(3t - 2s - r, \frac{1}{2} + \frac{t}{2} - \frac{s}{2} - \frac{r}{2}, t, s, r)$ con $\{t, s, r, \} \subset \mathbb{R}$

3.
   - per $k = 0$ ho ∞^1 soluzioni
   - per $k = \pm 3$ $\nexists$ soluzioni
   - per $k \notin \{0, \pm 3\}$ $\exists!$ soluzione

4. NOTA: in quest'esercizio i generatori di $\mathcal{W}_1$ saranno indicati con u_i, mentre quelli di $\mathcal{W}_2$ con v_j.
   (a) $\underline{\mathcal{W}_1}$: i vettori sono linearmente indipendenti $\Rightarrow \dim(\mathcal{W}_1) = 3$
   $\underline{\mathcal{W}_2}$: $\dim(\mathcal{W}_2) = 3$
   Notare che, per la formula di Grassmann, $\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2$ ha dimenzione almeno 2, dunque so già che la somma non è diretta!!
   $\underline{\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2}$: un vettore di $\mathcal{W}_1$ ha componenti $(a+\frac{b}{2}-c, \frac{a}{2}-\frac{b}{4}, 3b+3c, -a+\frac{3}{2}b+c)$ e uno di $\mathcal{W}_2$ ha componenti $(f, d-e, 2f, -d-e-3f)$ (a, b, c, d ed e sono i coefficienti delle combinazioni lineari). Uguagliando i due vettori trovo i valori dei coefficienti che mi danno i vettori dell'intersezione, da cui posso trovare la dimensione del sottospazio (è il numero di soluzioni) e poi estrarre una base: in questo caso ho che $\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2 =< v_2, v_3 >$ e dunque $\dim = 2$.
   $\underline{\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2}$: so che $\dim = 4$ e mi basta trovare 4 vettori indipendenti.
   (b) $\underline{\mathcal{W}_1}$: $\dim = 3$
   $\underline{\mathcal{W}_2}$: $\dim = 2$
   $\underline{\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2}$: $\dim = 3$ (notare che $\mathcal{W}_2 \subset \mathcal{W}_1$)
   $\underline{\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2}$: $\dim = 2$
   (c) $\underline{\mathcal{W}_1}$: $\dim = 2$
   $\underline{\mathcal{W}_2}$: $\dim = 2$
   $\underline{\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2}$: $\dim = 4$
   $\underline{\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2}$: $\dim = 0$