

1. Siano date le seguenti matrici. Determinare il rango per righe e il rango per colonne.

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -\frac{1}{2} & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathcal{D} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & \frac{1}{2} & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

2. Calcolare l'inversa, se possibile, delle matrici precedenti e scrivere la matrice e la sua inversa come prodotto di matrici elementari.

3. Siano dati i seguenti insiemi di vettori. Determinarne il rango e trovare una base del sottospazio da essi generato.

(a) $U = \{u_1 = (1, 0, 1, -1), u_2 = (1, -1, \frac{1}{2}, 1), u_3 = (0, 1, \frac{1}{2}, -2)\}$

(b) $V = \{v_1 = (1, \frac{3}{2}, -1), v_2 = (-1, 0, -1), v_3 = (0, \frac{3}{2}, -2), v_4 = (-1, \frac{3}{2}, -3)\}$

(c) $W = \{w_1 = (1, 0, -1), w_2 = (1, 0, 1), w_3 = (3, 1, -1), w_4 = (1, 1, -1)\}$

(d) $Z = \{z_1 = (0, -1, 1, 2), z_2 = (1, 0, 1, -1), z_3 = (1, -1, 2, 1), z_4 = (2, -1, 3, 0)\}$

4. Siano dati i seguenti sistemi; dire, usando il teorema di K-R-C, se sono compatibili, specificando il numero di soluzioni e in caso affermativo risolverli.

(a)
$$\begin{cases} x_1 + x_3 - x_4 = 1 \\ 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 = -1 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$$

(b)
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -1 \\ x_1 + \frac{1}{2}x_2 = -2 \\ -\frac{1}{2}x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$$

(c)
$$\begin{cases} -x_1 - x_2 + 2x_3 = -2 \\ x_1 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$$