Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica
Tutorato di GE1 - A.A. 2005/2006
Docente: Prof. A. F. Lopez - Esercitatore: Dott. V. Talamanca
Tutori: Dott. Andrea Agnesse & Dott. Nazareno Maroni
Sito: ***http://andynaz.altervista.org/didattica.htm***

Tutorato n.8 del 4/5/2006

0. Dire, giustificando la risposta, se le seguenti affermazioni sono vere o false:
   (a) $\mathcal{A} \in GL_n(\mathbb{R})$, se r_i sono le righe e c_i sono le colonne di $\mathcal{A} \Rightarrow$ $< r_1, r_2, \cdots, r_n > = < c_1, c_2, \cdots, c_n >$
   (b) $\mathcal{A} \in M_n(\mathbb{R})$, se r_i sono le righe e c_i sono le colonne di $\mathcal{A} \Rightarrow$ $< r_1, r_2, \cdots, r_n > = < c_1, c_2, \cdots, c_n >$
   (c) $\mathcal{A} \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$, se r_i sono le righe e c_i sono le colonne di $\mathcal{A} \Rightarrow$ $dim_{\mathbb{R}}(< r_1, r_2, \cdots, r_n >) = dim_{\mathbb{R}}(< c_1, c_2, \cdots, c_m >)$
   (d) $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathcal{B} \in GL_3(\mathbb{R}) \Rightarrow rg(\mathcal{AB}) = 2$
   (e) $\exists\ \mathcal{A}, \mathcal{B} \in M_n$, con $\mathcal{A}$ invertibile e $\mathcal{B}$ non invertibile tali che $\mathcal{AB} \in GL_n$

1. Risolvere il seguente sistema usando KRC e Cramer.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 = 1 \\ -x_1 + \frac{1}{2}x_2 - x_4 = 0 \\ -2x_2 - 4x_3 + \frac{1}{5}x_4 = \frac{1}{2} \\ -3x_1 + x_2 - \frac{1}{3}x_3 = -1 \end{cases}$$

2. Trovare i valori di k per cui il sistema risulta compatibile (stabilendo il numero di soluzioni), incompatibile e, nel caso in cui abbia un'unica soluzione, risolverlo con Cramer.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + \frac{3}{2}x_3 = \frac{1}{3} \\ -x_1 + 2x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + \frac{3}{4}x_2 - x_3 - \frac{1}{2}x_4 = 0 \\ kx_2 - 2x_3 - 3x_4 = -1 \end{cases}$$

3. Dati i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{A}^3$ dire quali tra questi sono suoi sottospazi affini:
   (a) $\{(x, y, z) \in \mathbb{A}^3 \mid x + y + z = 0\}$
   (b) $\{(x, y, z) \in \mathbb{A}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$
   (c) $\{(x, y, z) \in \mathbb{A}^3 \mid x - 3y = 5\}$

4. Dati i seguenti sottospazi affini trovare una base della loro giacitura:
   (a) $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{A}^4 \mid x_1 + x_3 - x_4 = e\}$
   (b) $\{(x, y, z) \in \mathbb{A}^3 \mid -x + z - 5y = 3\} \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y = 5\}$
   (c) $\{(x, y, z) \in \mathbb{A}^3 \mid z = -1 \ \wedge \ x = 2\}$

5. Sia $\mathcal{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\}$. Dimostrare che $\mathcal{A}$ é uno spazio affine su $\mathbb{R}$.

6. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione e sia $\mathcal{B} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = f(x, y)\}$. Dimostrare che $\mathcal{B}$ é uno spazio affine su $\mathbb{R}^2$.