Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica
Tutorato di GE1 - A.A. 2005/2006
Docente: Prof. A. F. Lopez - Esercitatore: Dott. V. Talamanca
Tutori: Dott. Andrea Agnesse & Dott. Nazareno Maroni
Sito: *http://andynaz.altervista.org/didattica.htm*

Soluzioni del tutorato n.8 del 4/5/2006

0. (a) La matrice è invertibile, dunque il rango è massimo, $rg(\mathcal{A}) = n$, dunque $< r_1, \ldots, r_n >= \mathbb{R}^n =< c_1, \ldots, c_n >$
   (b) È estremamente falsa visto che in generale i vettori per riga sono diversi dai vettori per colonna. Un esempio è la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$: le righe generano l'asse y del piano, mentre le colonne l'asse x.
   (c) È vera, infatti in una matrice il rango per righe è uguale al rango per colonne. Ricordiamo che questo è vero per una qualunque matrice (anche non quadrata).
   (d) È vera ($rg(\mathcal{A}) = 2$).
   (e) È falsa, infatti $\det(\mathcal{AB}) = \det(\mathcal{A})\det(\mathcal{B}) = \det(\mathcal{A}) \cdot 0 = 0$ quindi la matrice prodotto non è invertibile.

1. $x_1 = -\frac{11}{43}, \qquad x_2 = -\frac{67}{43}, \qquad x_3 = \frac{27}{43}, \qquad x_4 = -\frac{45}{86}$

2.
   - se $k = -\frac{11}{2}$ il sistema è incompatibile
   - se $k \neq -\frac{11}{2}$ il sistema ha un'unica soluzione

3. (a) L'equazione del sottoinsieme è un sistema (anche se formato da una sola riga) di equazioni lineari, le cui soluzioni sono un sottospazio affine (c'è un teorema).
   (b) No; per vederlo possiamo considerare la seguente dimostrazione per assurdo:
   ipotizziamo che il sottoinsieme (che chiameremo $\mathcal{A}$) sia un sottospazio affine di $\mathbb{A}^3$, dunque $\mathcal{A} = S_{P,\mathcal{W}}$, per qualche $P \in \mathbb{A}^3$ e per qualche $\mathcal{W}$ sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$. In particolare $\mathcal{W}$ sarà la giacitura di $\mathcal{A}$, e dati due punti $P, Q \in \mathcal{A} \Rightarrow \overrightarrow{PQ} \in \mathcal{W}$. Considerando ora i seguenti punti, $P_1 = (1, 0, 1)$, $Q_1 = (1, 0, 2)$,

$P_2 = (0, -1, 0)$, $Q_2 = (0, 1, 0)$, $P_3 = (-1, 0, 0)$, $Q_3 = (1, 0, 0)$, abbiamo che $\overrightarrow{P_1Q_1}, \overrightarrow{P_2Q_2}, \overrightarrow{P_3Q_3} \in \mathcal{W}$; ma questi tre vettori sono tra loro linearmente indipendenti, dunque $\mathcal{W} = \mathbb{R}^3$. Dunque $\mathcal{A} = \mathbb{A}^3$, il che è assurdo perché ci sono punti che non appartengono ad $\mathcal{A}$ (ad esempio il punto $(0, 0, 0)$ non soddisfa l'equazione $x^2 + y^2 = 1$).

(c) L'equazione del sottoinsieme è un sistema (anche se formato da una sola riga) di equazioni lineari, le cui soluzioni sono un sottospazio affine (c'è un teorema).

4. (a) $\{(1, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1)\}$

   (b) $\{(5, 0, 5)\}$

   (c) $\{(0, 1, 0)\}$

5. Tutto quello che dobbiamo trovare è la funzione $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ che soddisfi le due proprietà SA1 e SA2.

   Una funzione possibile (*in quanto la scelta non è unica!!*) è

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} \times \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \Big((x, x^2), (y, y^2)\Big) & \mapsto & y - x \end{array}$$

   che consiste in pratica nel proiettare la parabola sull'asse x e considerare l'asse come lo spazio affine numerico $\mathbb{A}^1$.

   Dimostriamo ora le proprietà:

   SA1. Sia $P = (a, a^2) \in \mathcal{A}$ e $v \in \mathbb{R}$; devo trovare $Q \in \mathcal{A}$: $\overrightarrow{PQ} = v$ e dimostrare che è unico.

   Il punto Q è del tipo (b, b^2), con $b \in \mathbb{R}$, $\Rightarrow \overrightarrow{PQ} = b - a = v \Rightarrow b = a + v$, dunque ottengo un unico valore per b, e dunque un unico punto.

   SA2. Sia $P = (a, a^2)$, $Q = (b, b^2)$ e $R = (c, c^2)$;
   $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = (b - a) + (c - b) = c - a = \overrightarrow{PR}$.

6. Questo esercizio è in realtà una generalizzazione del precedente.

   La funzione che si può scegliere è

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B} \times \mathcal{B} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \Big((x, y, f(x, y)), (x', y', f(x', y'))\Big) & \mapsto & (x' - x, y' - y) \end{array}$$

   e la dimostrazione è analoga a quella dell'esercizio 5.