Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica
Tutorato di GE1 - A.A. 2005/2006
Docente: Prof. A. F. Lopez - Esercitatore: Dott. V. Talamanca
Tutori: Dott. Andrea Agnesse & Dott. Nazareno Maroni
Sito: ***http://andynaz.altervista.org/didattica.htm***

Tutorato n.2 del 9/3/2006

Esercizio 0 Siano $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in M_n$ tali che $\mathcal{AB} = \mathcal{BA}$. Dimostrare che

$$(\mathcal{A}+\mathcal{B})^2 = \mathcal{A}^2 + 2\mathcal{AB} + \mathcal{B}^2 \text{ e che } (\mathcal{A}+\mathcal{B})(\mathcal{A}-\mathcal{B}) = \mathcal{A}^2 - \mathcal{B}^2$$

Trovare 2 matrici $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in M_n$ per cui non è vero.

Esercizio 1 Esprimere le seguenti matrici come prodotto di matrici elementari.

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Esercizio 2 Dire per quali valori del parametro $a \in \mathbb{R}$ la seguente matrice $\mathcal{A}$ è invertibile. Fissato un valore di a trovare l'inversa e scrivere le matrici $\mathcal{A}$ e $\mathcal{A}^{-1}$ come prodotto di matrici elementari.

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & a & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Esercizio 3 Risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} x - 2y + z = 7 \\ 2x - y + 4z = 17 \\ 3x - 2y + 2z = 14 \end{cases}$$

Esercizio 4 Una matrice $\mathcal{A} \in M_n$ si dice *nilpotente* se $\exists\ n \in \mathbb{N} \mid \mathcal{A}^n = 0$. Siano $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in M_n$ due matrici nilpotenti tali che $\mathcal{AB} = \mathcal{BA}$; dimostrare che $(\mathcal{AB})$ e $(\mathcal{A}+\mathcal{B})$ sono anch'esse nilpotenti.

Esercizio 5 Risolvere il seguente sistema con il metodo dell'inversa.

$$\begin{cases} ix - y = 2i \\ 3x - 2iy = 1 \end{cases}$$

Esercizio 6 Data la matrice $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ trovare, se esistono, tutte le matrici $\mathcal{B} \in M_2$ che commutano con $\mathcal{A}$.

Esercizio 7 Data una matrice quadrata $\mathcal{A} = (a_{ij})$ si definisce la sua *traccia* come la somma degli elementi sulla diagonale: $tr(\mathcal{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$. Determinare la traccia delle matrici $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{AB}$ e $\mathcal{BA}$:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \qquad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 8 Siano $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in M_n$; dimostrare che $tr(\mathcal{AB}) = tr(\mathcal{BA})$. Se poi $\mathcal{B}$ è invertibile, dimostrare che $tr(\mathcal{B}^{-1}\mathcal{AB}) = tr(\mathcal{A})$.

Esercizio 9 Trovare i valori del parametro k affinché il seguente sistema abbia una, nessuna o infinite soluzioni.

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 3y + kz = 3 \\ x + ky + 3z = 2 \end{cases}$$