Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica
Tutorato di GE1 - A.A. 2005/2006
Docente: Prof. A. F. Lopez - Esercitatore: Dott. V. Talamanca
Tutori: Dott. Andrea Agnesse & Dott. Nazareno Maroni
Sito: *http://andynaz.altervista.org/didattica.htm*

Soluzioni del tutorato n.2 del 9/3/2006

NOTAZIONE
In queste soluzioni vengono usate le seguenti notazioni per le operazioni fondamentali sulle matrici e per le rispettive matrici elementari:

$\mathbf{R}_{i,j}$ indica che le righe i-esima e j-esima sono state scambiate;

$\mathbf{R}_i(c)$ indica che la riga i-esima è stata moltiplicata per una costante $c \neq 0$;

$\mathbf{R}_{i,j}(c)$ indica che alla riga i-esima è stata sommata la j-esima moltiplicata per una costante $c \neq 0$.

Esercizio 0

- $(\mathcal{A}+\mathcal{B})^2 = (\mathcal{A}+\mathcal{B})(\mathcal{A}+\mathcal{B}) = \mathcal{A}(\mathcal{A}+\mathcal{B}) + \mathcal{B}(\mathcal{A}+\mathcal{B}) = \mathcal{A}^2 + \mathcal{A}\mathcal{B} + \mathcal{B}\mathcal{A} + \mathcal{B}^2 = \mathcal{A}^2 + 2\mathcal{A}\mathcal{B} + \mathcal{B}^2$
- $(\mathcal{A}-\mathcal{B})(\mathcal{A}+\mathcal{B}) = \mathcal{A}(\mathcal{A}+\mathcal{B}) - \mathcal{B}(\mathcal{A}+\mathcal{B}) = \mathcal{A}^2 + \mathcal{A}\mathcal{B} - \mathcal{B}\mathcal{A} - \mathcal{B}^2 = \mathcal{A}^2 - \mathcal{B}^2$

Esercizio 1

- $\mathrm{R}_{1,2}\ \mathrm{R}_{1,2}(1)\ \mathrm{R}_1(4)\ \mathrm{R}_2(2)$
- $\mathrm{R}_{1,2}(\frac{1}{2})\ \mathrm{R}_{1,2}\ \mathrm{R}_1(2)\ \mathrm{R}_2(-1)$
- $\mathrm{R}_{1,2}(3)\ \mathrm{R}_1(-1)\ \mathrm{R}_{2,1}(2)\ \mathrm{R}_{1,2}$

Esercizio 2 Calcoliamo l'inversa di $\mathcal{A}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathrm{R}_{3,1}(1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a questo punto imponiamo $a \neq 0$ per poter dividere per a:

$$\xrightarrow{\mathrm{R}_{3,2}(-\frac{3}{a})} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2a+3}{a} & 1 & -\frac{3}{a} & 1 \end{pmatrix}$$

per lo stesso motivo imponiamo $a \neq -\frac{3}{2}$:

$$\xrightarrow{R_{3(\frac{a}{2a+3})}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{a}{2a+3} & -\frac{3}{2a+3} & \frac{a}{2a+3} \end{array}\right) \xrightarrow{R_{2,3}(1)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & \frac{a}{2a+3} & \frac{2a}{2a+3} & \frac{a}{2a+3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{a}{2a+3} & -\frac{3}{2a+3} & \frac{a}{2a+3} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_{2(\frac{1}{a})}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2a+3} & \frac{2}{2a+3} & \frac{1}{2a+3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{a}{2a+3} & -\frac{3}{2a+3} & \frac{a}{2a+3} \end{array}\right) \xrightarrow{R_{1,2}(-2)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{2a+1}{2a+3} & -\frac{4}{2a+3} & -\frac{2}{2a+3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2a+3} & \frac{2}{2a+3} & \frac{1}{2a+3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{a}{2a+3} & -\frac{3}{2a+3} & \frac{a}{2a+3} \end{array}\right)$$

Quindi per $a \neq 0$ e $a \neq -\frac{3}{2}$ la matrice è invertibile e $\mathcal{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2a+1}{2a+3} & -\frac{4}{2a+3} & -\frac{2}{2a+3} \\ \frac{1}{2a+3} & \frac{2}{2a+3} & \frac{1}{2a+3} \\ \frac{a}{2a+3} & -\frac{3}{2a+3} & \frac{a}{2a+3} \end{pmatrix}$.

Ora studiamo separatamente i casi $a = 0$ e $a = -\frac{3}{2}$.

<u>Caso $a = 0$</u>

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_{2,3}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_{2,1}(1)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_{3(-1)}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_{2,3}(-2)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_{2(\frac{1}{3})}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_{1,2}(-2)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Quindi per $a = 0$ la matrice è invertibile e l'inversa è $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

<u>Caso $a = -\frac{3}{2}$</u>

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_{3,1}(1)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_{3,2}(2)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

Quindi per $a = -\frac{3}{2}$ la matrice non è invertibile, perché se lo fosse il sistema $\mathcal{A}x = 0$ con $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ dovrebbe avere un unica soluzione, ma quel sistema ne ammette ∞^1 : $x_3 = t \qquad x_2 = -\frac{2}{3}t \qquad x_1 = -\frac{4}{3}t$.

Scriviamo ora $\mathcal{A}$ e $\mathcal{A}^{-1}$ come prodotto di matrici elementari: poiché fare un'operazione sulle righe equivale a moltiplicare a sinistra per la corrispondente matrice elementare avremo

$$\mathcal{A}^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Per ottenere $\mathcal{A}$ come prodotto di matrici elementari scriviamo $\mathcal{A}$ come $\mathcal{A} = (\mathcal{A}^{-1})^{-1}$, dunque, chiamando le matrici elementari di $\mathcal{A}^{-1}$ come $\mathcal{A}_i$ con $i = 1, ..., 6$ avremo
$\mathcal{A} = (\mathcal{A}^{-1})^{-1} = (\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2\mathcal{A}_3\mathcal{A}_4\mathcal{A}_5\mathcal{A}_6)^{-1} = \mathcal{A}_6^{-1}\mathcal{A}_5^{-1}\mathcal{A}_4^{-1}\mathcal{A}_3^{-1}\mathcal{A}_2^{-1}\mathcal{A}_1^{-1}$, dunque

$$\mathcal{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 3 $\exists!$ soluzione $(2, -1, 3)$

Esercizio 4 Poiché $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono nilpotenti, esistono $a, b \in \mathbb{N}$ tali che $\mathcal{A}^a = \mathcal{B}^b = 0$.

- $(\mathcal{AB})^a = \mathcal{AB} \cdot \mathcal{AB} \cdot \ldots \cdot \mathcal{AB} = \mathcal{A}^a\mathcal{B}^a = 0\mathcal{B}^a = 0$
- Notiamo prima di tutto che se $\mathcal{A}^n = 0$ e $m \geq n$ allora $\mathcal{A}^m = 0$.
  Possiamo dunque scrivere (visto che le due matrici commutano) che

$$\begin{aligned}(\mathcal{A}+\mathcal{B})^{a+b} &= \sum_{k=0}^{a+b}\binom{a+b}{k}\mathcal{A}^k\mathcal{B}^{(a+b)-k} = \\ &= \sum_{k=0}^{a}\binom{a+b}{k}\mathcal{A}^k\mathcal{B}^{(a+b)-k} + \sum_{k=a+1}^{a+b}\binom{a+b}{k}\mathcal{A}^k\mathcal{B}^{(a+b)-k} = 0\end{aligned}$$

  in quanto ogni termine $\mathcal{B}^{(a+b)-k}$ nella prima sommatoria e ogni termine $\mathcal{A}^k$ nella seconda sono nulli.

Esercizio 5 La soluzione è: $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -2i & 1 \\ -3 & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$.

Esercizio 6 Sia $\mathcal{B} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ la generica matrice 2×2 $(a, b, c, d, \in \mathbb{R})$. Le matrici che cerchiamo sono tutte quelle per cui

$$\mathcal{AB} = \mathcal{BA} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a+b \\ c & c+d \end{pmatrix}$$

Risolvendo il sistema (ovvero eguagliando termine a termine) otteniamo che le matrici cercate sono del tipo $\mathcal{B} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ con $a, b \in \mathbb{R}$.

Esercizio 7 $tr(\mathcal{A}) = 0$ e $tr(\mathcal{B}) = tr(\mathcal{AB}) = tr(\mathcal{BA}) = 3$

Esercizio 8 Questo esercizio sarà presente nel prossimo tutorato per cui non vi dò subito le soluzioni!!

Esercizio 9

- per $k = -3$ il sistema è incompatibile
- per $k = 2$ $\exists$ ∞^1 soluzioni
- per $k \notin \{-3, 2\}$ $\exists!$ soluzione