UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Laurea in Matematica

GEOMETRIA 1

Prima prova di esonero - a.a. 2005-2006

1. Sia V uno spazio vettoriale reale.

(a) Si definiscano le nozioni di indipendenza lineare tra vettori di V e di dimensione di V;

(b) Si enunci il teorema principale che relaziona la dipendenza o indipendenza lineare tra due insiemi di vettori di V ed il loro numero;

(c) si dimostri tale risultato.

2. Sia k un numero reale. Si consideri il sistema lineare

$$\begin{cases} kx_1 - kx_2 + x_3 = 0 \\ kx_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - kx_2 + x_4 = -1 \\ x_1 + x_2 + x_3 - kx_4 = 1 \end{cases}.$$

Utilizzando esclusivamente operazioni elementari, si determinino i valori di k per i quali il sistema è (o no) compatibile e, in tal caso, si calcolino esplicitamente le soluzioni.

3. Sia k un numero reale e si considerino le due matrici

$$A = \begin{pmatrix} k & 1 & 0 \\ 0 & k & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Si determinino i valori di k per i quali A può essere trasformata in B con sole operazioni elementari;

(b) per i valori di k individuati sopra, si determini una sequenza di operazioni elementari che trasforma A in B.

4. Siano k un numero reale, $v_k = (k, k, 0) \in \mathbb{R}^3$, $W \subset \mathbb{R}^3$ il sottospazio vettoriale delle soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} y = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$$

e $U_k \subset \mathbb{R}^3$ il sottospazio vettoriale

$$U_k =< (0,0,1),\ (1,1,0),\ (1,1,k) > .$$

(a) Si determinino due basi di $(W + < v_k >)$ e U_k;

(b) si determinino le dimensioni di $U_k + (W + < v_k >)$ e di $U_k \cap (W + < v_k >)$;

(c) si determinino (se esistono) i valori di k per i quali

$$U_k \oplus W = \mathbb{R}^3.$$

5. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n e W un suo sottospazio non nullo di dimensione m.

(a) Si supponga che esiste un sottospazio U di V tale che

$$U + W \neq V, \quad \dim U \cap W = s.$$

Si determinino le condizioni necessarie su s affinchè U esista.

(b) Si determini per quali valori di s trovati in (a) tale U esiste veramente.