UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Laurea in Matematica

GEOMETRIA 1

Seconda prova di esonero - a.a. 2005-2006

1. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita e $F : V \to V$ un'applicazione lineare.

(a) Si definiscano le nozioni di autovalore, autovettore e di diagonalizzabilità di F.

(b) Si enunci il risultato che caratterizza la diagonalizzabilità di F (senza usare le basi).

(c) Si dimostri tale risultato.

2. Sia $\mathbf{A}$ uno spazio affine di dimensione 3 su uno spazio vettoriale reale V e sia Oe_1, e_2, e_3, un riferimento affine. Siano $A(-1,1,0), B(-1,1,1)$ e $Q(1,1,1)$ tre punti di $\mathbf{A}$ e sia r la retta in $\mathbf{A}$ di equazioni cartesiane $\begin{cases} 2X - Y + 3Z + 2 = 0 \\ X + 3Y - Z - 2 = 0 \end{cases}$.

(a) Determinare se esistono punti P appartenenti alla retta $\overline{AB}$ tali che la retta $\overline{PQ}$ è complanare con r.

(b) Determinare se esistono piani p contenenti A, B ed un unico punto di r e passanti per Q.

(c) Determinare se esistono piani p contenenti A, B ed un unico punto di r e non passanti per Q.

3. Sia $F : V \to W$ un'applicazione lineare tra due spazi vettoriali reali e si supponga

$$n = \dim V \geq \dim W = m.$$

(a) Si dimostri che se esiste un'applicazione lineare $G : W \to V$ tale che $N(F) \subseteq \mathrm{Im}(G)$ e $\mathrm{Im}(F) \subseteq N(G)$, allora $n = m$;

(b) Esiste un'applicazione lineare $G : W \to V$ tale che $N(F) \subseteq \mathrm{Im}(G)$ e $N(G) \subseteq \mathrm{Im}(F)$?

4. Sia a un numero reale, sia $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^4$ e sia $v = E_1 + E_2$. Sia $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ un'applicazione lineare tale che

$$F(v) = 0,\ F(E_2 + E_3) = E_2 + E_3 + 2E_4, F(E_2 - E_3) = E_2 - E_3, F(E_4) = 2E_2 + E_3 + aE_4.$$

(a) Determinare una matrice di F;

(b) trovare, per ogni $a \in \mathbb{R}$, basi per gli autospazi di F;

(c) determinare i valori di a per i quali F è diagonalizzabile.

5. Sia A uno spazio affine di dimensione $n \geq 1$ su uno spazio vettoriale V e siano S e T due sottospazi di A di dimensione $s \geq 1$ e $t \geq 1$ rispettivamente.

(a) Si dimostri che se $s = n - 1$ allora o S è parallelo a T o S interseca T.

(b) Si dimostri che se $s < n - 1$ allora non è detto che o S è parallelo a T o S interseca T.