Matematica - Roma Tre

GE310 - Istituzioni di Geometria Superiore - Prof. M.Pontecorvo

20 ottobre 2014

1. Dimostare che gli unici sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ che siano varietà connesse sono gli intervalli aperti i quali sono tutti omeomorfi a $\mathbb{R}$ stesso.
2. Fornire un esempio di applicazione continua e suriettiva che non sia un'applicazione quoziente. (Dimostrare !)
3. Fornire un esempio di applicazione quoziente che non sia aperta.
4. Enunciare e dimostrare il *Lemma dell'applicazione chiusa.*
5. (a) Il cilindro chiuso $\mathcal{C} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \parallel x^2 + y^2 = 1,\ \|z\| \leq 1\}$ è una varietà topologica ?
   (b) Il cilindro infinito $\mathcal{C} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \parallel x^2 + y^2 = 1\}$ è una varietà topologica ?
6. Definire $\mathbb{RP}^1$ e dimostrare che è una 1-varietà topologica. Classificarla.
7. Definire lo spazio topologico X_e che chiameremo *croce esotica* i cui punti sono $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$; con le seguenti proprietà, da dimostrare.
   (a) X_e non è a base numerabile.
   (b) X_e è localmente Euclideo.
   (c) X_e non è uno spazio topologico di Hausdorff.
8. (a) Definire $exp : \mathbb{R} \to S^1$ e dimostrare che è un'applicazone quoziente.
   (b) Descrivere la relazione di equivalenza indotta da exp sulla retta $\mathbb{R}$.
   (c) Dimostare che $exp : \mathbb{R} \to S^1$ è un rivestimento, infatti il rivestimento universale del cerchio.
   (d) Dimostare che per ogni intervallo aperto $U \subset \mathbb{R}$, $U \neq \mathbb{R}$, la restrizione $exp : U \to S^1$ fornisce un esempio di omeomorfismo locale che non sia un rivestimento su tutto il cerchio S^1.