

Matematica - Roma Tre
GE310 - Istituzioni di Geometria Superiore - Prof. M.Pontecorvo
31 OTTOBRE 2014

Compito in classe del 30 ottobre 2013 – fac simile

Punteggio totale 100 punti.

1. Sia γ la curva piana $(t^2, \frac{1}{3}t^3)$ definita nell'intervallo $t \in [-\pi, \pi]$.
 - (a) **(5 punti)**. Descrivere i valori di t per cui γ è liscia e quelli per cui è regolare.
 - (b) **(10 punti)**. Calcolare la lunghezza di γ nell'intervallo $[-\sqrt{5}, \sqrt{5}]$.
 - (c) **(10 punti)**. Esiste una parametrizzazione $\alpha(u)$ della traccia di γ che sia regolare ?
 - (d) **(15 punti)**. Fornire un esempio di una curva regolare $\alpha(u)$ la cui traccia ammette un'altra parametrizzazione $\beta(t)$ che sia liscia ma non regolare.
2. **(20 punti)**. Enunciare il teorema di classificazione delle superfici compatte. Sia Σ una superficie compatta e supponiamo che

$$\chi(\Sigma \# \mathbb{R}P^2) = -4.$$

Cosa si può dire su Σ ?

3. **(15 punti)**. Consideriamo l'applicazione

$$\begin{array}{ccc} \bar{x} : [-\pi, \pi] \times [-1, 1] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (u, v) & \longmapsto & (\cos u, \sin u, v) \end{array}$$

Notare che l'immagine non è una superficie topologica e descriverla come poligono etichettato, giustificando attentamente tutti i passaggi.

4. **(25 punti)**. Consideriamo l'applicazione

$$\begin{array}{ccc} \bar{x} : [-\pi, \pi] \times [-1, 1] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (u, v) & \longmapsto & ((2 + v \cos \frac{u}{2}) \cos u, (2 + v \cos \frac{u}{2}) \sin u, v \sin \frac{u}{2}) \end{array}$$

Fatto. \bar{x} è iniettiva nell'interno del suo dominio di definizione.

Usare liberamente il *Fatto* per dimostrare che l'immagine è omeomorfa a un certo poligono etichettato e disegnarlo.