Matematica - Roma Tre

GE310 - Istituzioni di Geometria Superiore - Prof. M.Pontecorvo

10 dicembre 2014

1. Enunciare e dimostrare la proprietà che sia il prodotto scalare che il prodotto vettoriale di due vettori in $\mathbb{R}^3$ soddisfa la regola di Leibniz.

2. Per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$
$$S_a := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, x^2 + y^2 = a + z^2\}$$
è una superficie regolare? Queste superfici sono di rotazione?
Giustificare attentamente la risposta e disegnare S_a per almeno due valori del parametro a.

3. Do Carmo, p.65 es. 4 ; p.80 es. 7,8.

4. Do Carmo, p.89 es. 11. In questo esercizio *normal* indica la retta normale geometrica.

5. (Algebra lineare). Dimostrare che sono ben definiti la traccia e il determinante di un operatore lineare $L : V \to V$ su uno spazio vettoriale di dimensione finita.

6. Studiare i punti critici della funzione "altezza" su una superficie Σ nello spazio Euclideo, in coordinate locali. Seguendo i seguenti passi.

   i) Considerare $\mathbf{x} : U \to \Sigma \subset \mathbb{R}^3$ una carta locale qualsiasi su Σ.

   ii) Scrivere in coordinate locali una funzione $f(u, v)$ che calcola la distanza con segno del punto $\mathbf{x}(u, v)$ dal piano orizzontale $z = 0$.

   iii) Calcolare la derivata df in coordinate locali, la matrice 2×1 cioè che rappresenta df nella base $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ del piano tangente $T_p\Sigma$.

   iv) Usare il risultato per dare una caratterizzazione geometrica dei punti critici di f.