Matematica - Roma Tre

GE310 - Istituzioni di Geometria Superiore - Prof. M.Pontecorvo

22 dicembre 2014

1. Sia $\gamma(t)$ una curva liscia con la proprietà che $|\gamma(t)|$ è costante. Dimostrare che il vettore posizione è sempre perpendicolare al vettore velocità e che questa proprietà è equivalente all'affermazione che l'applicazione di Gauss su una sfera di raggio R centrata nell'origine è data da $p \mapsto p/R$, a meno del segno.

2. Sia $\gamma(s) \subset \Sigma \subset \mathbb{R}^3$ una curva regolare parametrizzata per ascissa curvilinea, su una superficie orientata dal versore normale $N : \Sigma \to S^2$.

   Si dice *curvatura normale* di γ su Σ il prodotto scalare

   $$k_n(\gamma(s)) := \langle \ddot{\gamma}(s), N(\gamma(s)) \rangle$$

   Calcolare la curvatura normale del cerchio standard $z = 0 = 1 - x^2 - y^2$ sulle seguenti superfici:

   (a) La sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

   (b) Il cilindro $x^2 + y^2 = 1$

   (c) Il piano $z = 0$.

   Osservare che la sfera e il cilindro sono tangenti - hanno cioè lo stesso piano tangente - lungo ciascun punto del cerchio standard. Spiegare l'influenza di questa osservazione sul calcolo delle prime due curvature normali.

3. Sia Σ una superficie in $\mathbb{R}^3$ e sia $v \in S^1 \subset T_p\Sigma$ un versore tangente in $p \in \Sigma$. Possiamo scrivere $v = \cos\theta e_1 + \sin\theta e_2$ con e_1, e_2 base ortonormale di $\in T_p\Sigma$ nonché direzioni principali nel punto p. Per il Teorema Spettrale infatti l'operatore autoaggiunto $-dN$ ha sempre due autovalori reali $k_1 \leq k_2$ con autovettori e_1, e_2.

   Abbiamo visto a lezione che la curvatura normale k_n di una curva $\gamma \subset \Sigma$ con $\gamma(0) = p$ e $\dot{\gamma}(0) = v$ dipende solo dalla direzione di $\dot{\gamma}$. Nel punto p, $k_n(\gamma) = k_n(\theta) = k_n(-\theta)$ coincide con la restrizione della seconda forma fondamentale ristretta ai versori tangenti e quindi si ottiene la seguente funzione di una variabile, periodica di periodo π:

   $$\begin{array}{rccl} k_n : & [0, \pi) & \longrightarrow & [k_1, k_2] \\ & \theta & \longmapsto & k_1 \cos^2\theta + k_2 \sin^2\theta \end{array}$$

   I punti di max e min sono le direzioni principali mentre gli zeri di k_n (cioè le direzioni in cui la curvatura normale si annulla) sono detti *direzioni asintotiche*. Dopo aver tracciato un grafico qualitativo della funzione $k_n(\theta)$, dimostrare che nel punto $p \in \Sigma$ si hanno:

   (a) Zero direzioni asintotiche se e solo se il punto p è ellittico

   (b) Esattamente una direzione asintotica se e solo se il punto è parabolico

   (c) Esattamente due direzioni asintotiche se e solo se il punto è iperbolico

   (d) Tre direzioni asintotiche se e solo se infinite direzioni asintotiche se e solo se il punto è planare

Girare prego, $\longrightarrow$

4. Dimostrare che ogni superficie è localmente orientabile e ammette localmente due orientazioni. Dimostare che la curvatura di Gauss - e quindi anche la nozione di punto ellittico, iperbolico etc. - non dipende dalla scelta dell'orientazione. In particolare queste nozioni rimangono valide anche per superfici non-orientabili.

   Cosa succede invece per le curvature principali e per la curvatura Media?

5. Sia Σ una superficie di rotazione che si ottiene facendo ruotare attorno all'asse z la curva $\gamma(s) = (\phi(s), \psi(s))$ parametrizzata per ascissa curvilinea e contenuta nel piano yz, cioè $x = 0$.

   (a) Mostrare che la curvatura di Gauss di Σ è una funzione della sola variabile s: $K = -\frac{\ddot{\phi}}{\phi}$, non dipende dalla variabile di rotazione u.

   (b) Usare il risultato per indicare con un disegno il segno della curvatura di Gauss di una "bottiglia di Coca Cola". Indicare cioè gli intervalli sull'asse z in cui $K > 0$ e quelli in cui $K < 0$.

   (c) Calcolare le curvature principali, la curvatura di Gauss e Media di una sfera di raggio R.