Matematica - Roma Tre

GE310 - Istituzioni di Geometria Superiore - Prof. M.Pontecorvo

8 gennaio 2015

Questo foglio di esercizi va inteso come preparazione individuale al secondo compito in itinere o all'appello di esame. In particolare le soluzioni non sono da consegnare ma le possiamo discutere insieme durante il **ricevimento di giovedì 8 gennaio alle 5.**

Il secondo **compito** in itinere di **venerdì 9 gennaio** alle 2 in aula B3 è riservato a chi possiede entrambi i seguenti due requisiti: (i) punteggio ≥ 40 *punti* nel compito di novembre
(ii) si sia prenotato al 2^0 esonero sul web studenti www.mat.uniroma3.it

Infine, possono partecipare al **compito scritto di lunedì 12 gennaio** solo coloro che hanno entrambi i seguenti requisiti: (i) NON sono prenotati al 2^0 esonero (ii) sono iscritti all'appello sul portale d'ateneo.

Per poter verbalizzare il voto d'esame (comprensivo di esercizi per casa e tesina di Mathematica) è necessario iscriversi sul portale d'ateneo come di consueto.

1. Cercare sul libro di testo una parametrizzazione - coordinate locali - per ciascuna delle seguenti superfici regolari e calcolarne la curvatura - a mano, e/o con Mathematica

$$dN = -II \cdot I^{-1}$$

trovare cioè la matrice 2×2 che rappresenta la curvatura rispetto alla base del piano tangente in quelle coordinate. Per ciascuna superficie, descrivere l'immagine della carta locale, e quindi il (sotto)insieme su cui è stata calcolata la cuvatura. Ricordiamo che un punto $p \in \Sigma$ si dice ellittico se la curvatura di Gauss di Σ è positiva in p, etc. etc.
(a) La sfera di raggio R $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$
(b) L'iperboloide a una falda $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$ detto anche iperboliode iperbolico, perché?
(c) Il paraboloide di rotazione $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z\}$ detto anche paraboloide ellittico, perché?
(d) La sella $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = xy\}$ detto anche paraboloide iperbolico, perché?
(e) L'iperboloide a due falde $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -x^2 - y^2 + z^2 = 1\}$ detto anche iperboloide ellittico, perché?
(f) Il toro $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 + (\sqrt{x^2 + y^2} - 3)^2 = 1\}$
(g) Mostrare inoltre che: tutti i punti della sfera sono ombellicali, tutti i punti delle *quadriche* (a)-(e) sono dello stesso tipo, mentre invece la curvatura di Gauss del toro assume tutti i segni possibili. Cercare di spiegare il fenomeno geometricamente e/o analiticamente.
(h) Quali di queste superfici sono di rotazione?

2. Sia $\mathcal{C}$ il cilindro $\mathcal{C} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$. Considerata l'applicazione

$$\begin{array}{cccc} \Phi : & \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3 \\ & (u, v) & \longmapsto & (e^{iu}, v) \end{array}$$

mostrare che:

(a) Φ è un'isometria locale tra il piano e il cilindro che non è un'isometria globale.
(b) Trovare un aperto massimale $U \subset \mathbb{R}^2$ tale che la restrizione $\Phi_{|U}$ sia un'isometria globale sull'immagine e determinare l'immagine.
(c) Non esiste una congruenza (cioè un movimento rigido di $\mathbb{R}^3$) che manda un aperto del cilindro $\mathcal{C}$ in un aperto del piano.

3. Considerato $\mathbb{R}^2$ come spazio vettoriale Euclideo con prodotto scalare standard, mostrare che un'applicazione lineare conforme conserva gli angoli tra i vettori.

4. *Il gruppo* CO_2 delle trasformazioni lineari conformi del piano $\mathbb{R}^2$ è

$$CO_2 = \{A \in \mathcal{M}_2 \mid A^t A = \lambda Id., \text{ per qualche } \lambda > 0\}.$$

Mostrare che valgono le seguenti proprietà:

(a) CO_2 è un gruppo rispetto alla moltilicazione righe per colonne.

(b) CO_2 ha due componenti connesse.

(c) Una matrice A appartiene a CO_2 se e solo se ruota tutti i vettori di uno stesso angolo θ e li dilata o li contrae di uno stesso fattore λ.

(d) Una matrice quadrata 2×2 commuta con la matrice $J := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ se e solo se $A \in CO_2$ e inoltre det $A > 0$. Concludere che una tale matrice è della forma $\lambda \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ per qualche $\theta \in [0, 2\pi)$.

5. Riconoscere che la traccia della curva

$$\gamma(v) = (\phi(v), \psi(v)) = (e^{-v}, \int_0^v \sqrt{1 - e^{-2t}} dt), v \geq 0$$

coincide con quella della *trattrice* dell'esercizio 4 a p.7 per $t \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$.

La superficie di rotazione ottenuta ruotando la trattrice, posta nel piano xz, attorno all'asse z è detta *pseudosfera*, perché?

Calcolare la curvatura di Gauss della pseudosfera in due modi:
(i) Usando la formula a p.162, giustificare.
(ii) Usando la formula dell'es.1 p.237, giustificare.

Esiste un'isometria locale tra un'aperto della pseudosfera e un aperto del toro dell'esercizio precedente?