IL TRIEDRO E LE FORMULE DI FRENET

NOTE PER IL CORSO DI GE310, DIPARTIMENTO DI MATEMATICA E FISICA, UNIVERSITÀ ROMA TRE

VALERIO TALAMANCA

In questa breve nota enunciamo e dimostriamo le formule Frenet per una curva regolare e la loro applicazione al calcolo di curvatura, torsione e triedro di Frenet per una curva regolare tramite il programma Mathematica.

Sia $\gamma : (a,b) \to \mathbb{R}$, una curva regolare, i versori tangente, normale e binormale sono definiti come segue

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}$$
$$\mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{T}'(t)}{\|\mathbf{T}'(t)\|}$$
$$\mathbf{B}(t) = \mathbf{T}(t) \times \mathbf{N}(t)$$

Dove $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ indica il prodotto vettoriale tra $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$. Spesso nel prosieguo useremo $\mathbf{T}$, $\mathbf{N}$ e $\mathbf{B}$ invece di $\mathbf{T}(t)$, $\mathbf{N}(t)$ e $\mathbf{B}(t)$. Poichè vettori a norma costante sono perpendicolari alla propria derivata abbiamo che $\mathbf{T}, \mathbf{N}$ e $\mathbf{B}$ costiuiscono una terna di vettori perpendicolari orientati come la base standard di $\mathbb{R}^3$ e vengono chiamati il *triedro (mobile) di Frenet*. La funzione

$$\kappa(t) = \frac{\|\mathbf{T}'(t)\|}{\|\gamma'(t)\|}$$

è detta la *curvatura* di γ.

Formule di Frenet 0.1. *Sia $\gamma : (a,b) \to \mathbb{R}$, una curva regolare, allora*

a) $\mathbf{T}'(t) = \|\gamma'(t)\|\kappa(t)\mathbf{N}(t)$
b) $\mathbf{N}'(t) = -\|\gamma'(t)\|\kappa(t)\mathbf{N}(t) + \|\gamma'(t)\|\tau(t)\mathbf{B}(t)$
c) $\mathbf{B}'(t) = \|\gamma'(t)\|\tau(t)\mathbf{N}(t)$

a)) è sostanzialmente la definizione di $\kappa(t)$ visto che per definizione $\mathbf{N}(t)$ è proporzionale a $\mathbf{T}'(t)$. Poichè $\mathbf{B} \cdot \mathbf{T} = 0$ abbiamo che

$$0 = (\mathbf{B} \cdot \mathbf{T})' = \mathbf{B}' \cdot \mathbf{T} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{T}'.$$

D'altro canto T' è proporzionale a $\mathbf{N}$ che è perpendicolare a $\mathbf{B}$ per definizione. Quindi $\mathbf{B}' \cdot T = 0$ cioè $\mathbf{B}'$ è perpendicolare sia a $\mathbf{B}$ che ha $\mathbf{T}$. Ne segue che $\mathbf{B}'$ risulta proporzionale a $\mathbf{N}$ e ponendo

$$\tau(t) = -\frac{\mathbf{B}'(t) \cdot \mathbf{N}(t)}{\|\gamma'(t)\|}$$

si ottiene c). Per dimostrare b) notiamo che $\mathbf{N}'$ è perpendicolare a $\mathbf{N}$ e quindi dobbiamo solo calcolare le sue componenti lungo $\mathbf{T}(t)$ e $\mathbf{B}(t)$. Ora $\mathbf{N} \cdot \mathbf{T} = 0$ e quindi $0 = \mathbf{N}' \cdot \mathbf{T} + \mathbf{N} \cdot \mathbf{T}'$. Da cui si ottiene

$$\mathbf{N}' \cdot \mathbf{T} = -\mathbf{N} \cdot \mathbf{T}' = -\mathbf{N} \cdot \kappa(t)\|\gamma'(t)\|\mathbf{N} = -\|\gamma'(t)\|\kappa(t)$$

Similmente $\mathbf{N} \cdot \mathbf{B} = 0$ e quindi

$$\mathbf{N}' \cdot \mathbf{B} = -\mathbf{N} \cdot \mathbf{B}' = -\mathbf{N} \cdot (-\|\gamma'(t)\|\tau(t)\mathbf{N}) = \|\gamma'(t)\|\tau(t)$$

La funzione $\tau = \tau(t)$ è detta la *torsione* di γ

Passiamo ora alle applicazioni delle formule di Frenet: vogliamo ottenere delle formule che usino solo γ e le sue derivate per calcolare il triedro di Frenèt, la curvatura e la torsione di una curva γ infatti tali formule sono più semplici da implementare in Mathematica,.

Iniziamo con il triedro di Frenet: il versore tangente è già definito in termini di γ e γ'. Risulta più facile esprimere $\mathbf{B}$ nei termini voluti invece che $\mathbf{N}$. Il versore normale verrà calcolato usando il fatto che è il prodotto vettoriale ta $\mathbf{B}$ e $\mathbf{T}$. Ora sappiamo che $\gamma'(t) = \|\gamma'(t)\|\mathbf{T}(t)$, e quindi si ha

$$\gamma''(t) = (\|\gamma'(t)\|)'\mathbf{T}(t) + \|\gamma'(t)\|\mathbf{T}'(t) = (\|\gamma'(t)\|)'\mathbf{T}(t) + \|\gamma'(t)\|^2\kappa(t)\mathbf{N}(t).$$

Da cui

$$\gamma'(t) \times \gamma''(t) = \gamma'(t) \times ((\|\gamma'(t)\|)'\mathbf{T}(t)) + \gamma'(t) \times \left(\|\gamma'(t)\|^2\kappa(t)\mathbf{N}(t)\right) = \|\gamma'(t)\|^2\kappa(t)\left(\gamma'(t) \times \mathbf{N}(t)\right)$$

perchè $\gamma'(t)$ e $\mathbf{T}(t)$ sono paralleli. D'altro canto

$$\gamma'(t) \times \mathbf{N}(t) = \|\gamma'(t)\| \mathbf{T}(t) \times \mathbf{N}(t) = \|\gamma'(t)\| \mathbf{B}(t).$$

Quindi

$$\gamma'(t) \times \gamma''(t) = \|\gamma'(t)\|^3 \kappa(t) \mathbf{B}(t) \tag{1}$$

Poichè $\mathbf{B}$ ha norma 1 abbiamo che

$$\mathbf{B}(t) = \frac{\gamma'(t) \times \gamma''(t)}{\|\gamma'(t) \times \gamma''(t)\|}. \tag{2}$$

Per ottenere una formula per la curvatura basta prendere le norme in (1) ed esplicitare per $\kappa(t)$, ottenendo:

$$\kappa(t) = \frac{\|\gamma'(t) \times \gamma''(t)\|}{\|\gamma'(t)\|^3} \tag{3}$$

Per concludere vogliamo verificare che

$$\tau(t) = \frac{\gamma'(t) \times \gamma''(t) \cdot \gamma'''(t)}{\|\gamma'(t) \times \gamma''(t)\|^2} \tag{4}$$

Visto che $\gamma'(t) \times \gamma''(t)$ è proporzionale a $\mathbf{B}$ abbiamo che nel prodotto misto che appare in (4) l'unico contributo è quello della componente lungo $\mathbf{B}$ di $\gamma'''(t)$. Dunque si ha che

$$\gamma'''(t) = (\gamma''(t))' = \big((\|\gamma'(t)\|)' \mathbf{T}(t) + \|\gamma'(t)\|^2 \kappa(t) \mathbf{N}(t)\big) = \|\gamma'(t)\|^2 \kappa(t) \mathbf{N}'(t) + \text{termini perpendicolari a } \mathbf{B}(t)$$

usando b) si ottiene:

$$\gamma'''(t) = |\gamma'(t)\|^3 \kappa(t) \tau(t) \mathbf{B}(t) + \text{termini perpendicolari a } \mathbf{B}(t).$$

Ne segue che

$$\gamma'(t) \times \gamma''(t) \cdot \gamma'''(t) = \|\gamma'(t)\|^6 \kappa(t)^2 \tau(t)$$

e quindi usando la (3) abbiamo che

$$\tau(t) = \frac{\gamma'(t) \times \gamma''(t) \cdot \gamma'''(t)}{\|\gamma'(t)\|^6 \kappa(t)^2} = \frac{\gamma'(t) \times \gamma''(t) \cdot \gamma'''(t)}{\|\gamma'(t) \times \gamma''(t)\|^2}$$

Valerio Talamanca, Università degli Studi Roma Tre, Largo San Leonardo Murialdo 1, 00146 Roma, Italy