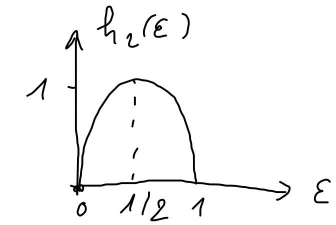
Disuguaglianza di Fano. Siano $X, \hat{X}$ due v.a. su $\mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_K\}$. $\quad K \quad K-1$

Chiamiamo $\varepsilon = \Pr[X \neq \hat{X}]$ (probab. che la stima di X sia errata)

Allora: $H(X|\hat{X}) \leq h_2(\varepsilon) + \varepsilon \log(K-1)$.



$\underline{\underline{h_2(\varepsilon)}} = -\varepsilon \log \varepsilon - (1-\varepsilon)\log(1-\varepsilon)$

Dim. Poniamo

$$Z = \begin{cases} 0 & \text{se } X = \hat{X} \\ 1 & \text{se } X \neq \hat{X} \end{cases} \rightarrow \begin{array}{l} \Pr[Z=0] = \Pr[X = \hat{X}] = 1-\varepsilon. \\ \Pr[Z=1] = \Pr[X \neq \hat{X}] = \varepsilon \end{array}$$

$$H(X, Z|\hat{X}) \overset{\text{catena}}{=} H(X|\hat{X}) + \boxed{\overset{=0}{H(Z|X,\hat{X})}}$$

$$\overset{\text{catena}}{=} H(Z|\hat{X}) + H(X|Z,\hat{X})$$

$H(X,Y) = H(X) + H(Y|X)$

$H(X,Y|\hat{X}) =$

$= H(X|\hat{X}) + H(Y|X,\hat{X})$

$$\Rightarrow H(X|\hat{X}) = H(Z|\hat{X}) + H(X|Z,\hat{X}) \leq \overset{=h_2(\varepsilon)}{H(Z)} + H(X|Z,\hat{X})$$

$$= h_2(\varepsilon) + \underbrace{\Pr[Z=0]}_{(1-\varepsilon)}\underbrace{H(X|Z=0,\hat{X})}_{0} + \underbrace{\Pr[Z=1]}_{\varepsilon}\underbrace{H(X|Z=1,\hat{X})}_{\leq \log(K-1)} = h_2(\varepsilon) + \varepsilon\log(K-1)$$

QED

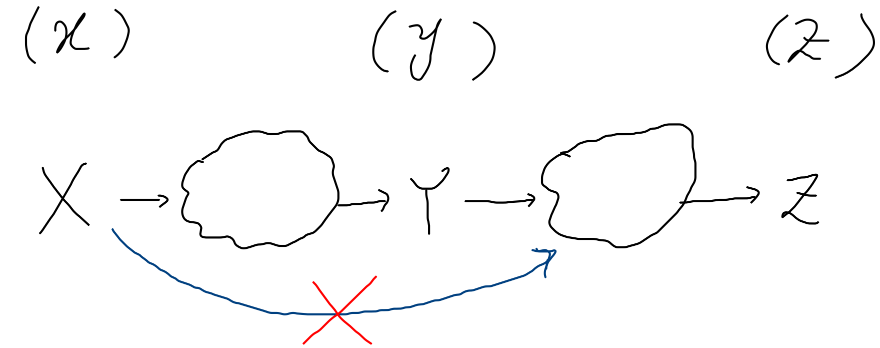
X e $\hat{X}$ coincidono?

si: $X = \hat{X}$ incertezza residua su X è 0

no: $K-1$ possibilità

$h_2(\varepsilon) +$
$+ \cancel{(1-\varepsilon) \cdot 0}$
$+ \varepsilon \cdot \log(K-1)$

Teoremi di elaborazione dei dati



Tre v.a. X, Y e Z sono in catena di Markov:

$$X \to Y \to Z$$

se $\quad p(z|x,y) = p(z|y) \quad$ per ogni $x \in \mathcal{X}, y \in \mathcal{Y}, z \in \mathcal{Z}$

La condizione è equivalente a:

$$\to \quad p(x,y,z) = p(x) \cdot p(y|x) \cdot p(z|y)$$

$$\boxed{p(x,y,z) = p(x) \cdot p(y,z|x) = p(x)\, p(y|x) \cdot \boxed{p(z|x,y)}}$$

vale sempre

$$= p(z|y)$$ per assunzione

Osservazioni. Se vale $X \to Y \to Z$,

allora $\quad H(Z|X,Y) = H(Z|Y)$

$$\underset{X,Y,Z}{\mathbb{E}}\left[-\log p(Z|X,Y)\right] = \underset{X,Y,Z}{\mathbb{E}}\left[-\log p(Z|Y)\right]$$

Inoltre $\quad H(X,Y,Z) = H(X) + H(Y|X) + H(Z|Y)$

Inoltre, X e Z non sono necessariamente indipendenti ma sono indipendenti condizionatamente alla Y:

$I(X;Y) = H(X) - H(X|Y)$

$$I(X;Z|Y) = H(Z|Y) - H(Z|X,Y) = 0$$

Se vale $X \to Y \to Z$, allora vale $Z \to Y \to X$ (lemma 2.1 nel testo)

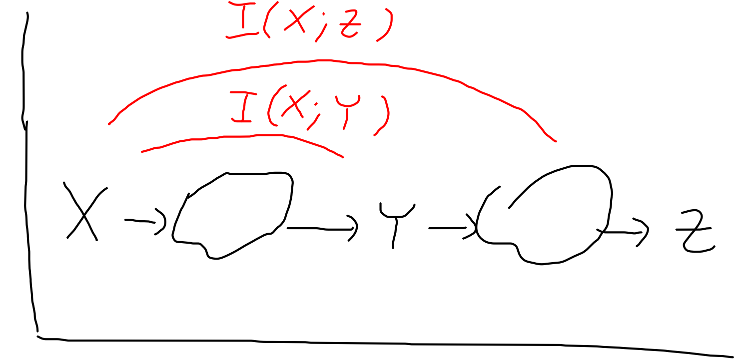
Infatti $I(X;Z|Y) = 0 \Rightarrow H(X|Y) = H(X|Y,Z) \Leftrightarrow p(x|y) = p(x|y,z)$

$\quad = H(X|Y) - H(X|Y,Z)$

$\Updownarrow$

$Z \to Y \to X$

$$\left(H(X,Y,Z) = H(X) + H(Y|X) + \underline{H(Z|X,Y)} \quad \text{vale sempre} \right)$$



Primo teorema di elaboraz. dati

Se vale $X \to Y \to Z$, allora $H(X|Y) \leq H(X|Z)$

Dim. Per il Lemma 2.1, vale $Z \to Y \to X$ e

rimuovendo il condizionamento, l'entropia può solo aumentare

$$H(X|Y) = H(X|Y,Z) \leq H(X|Z) \quad . \quad QED$$

$$\Longrightarrow \; -H(X|Z) \leq -H(X|Y)$$

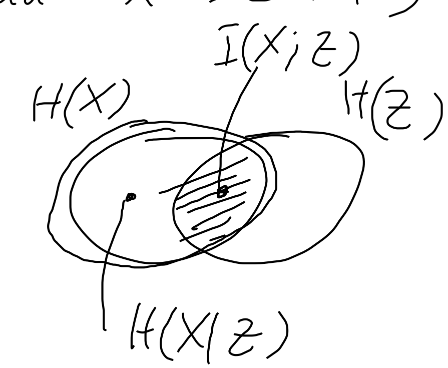
Secondo teorema di elaboraz. dati

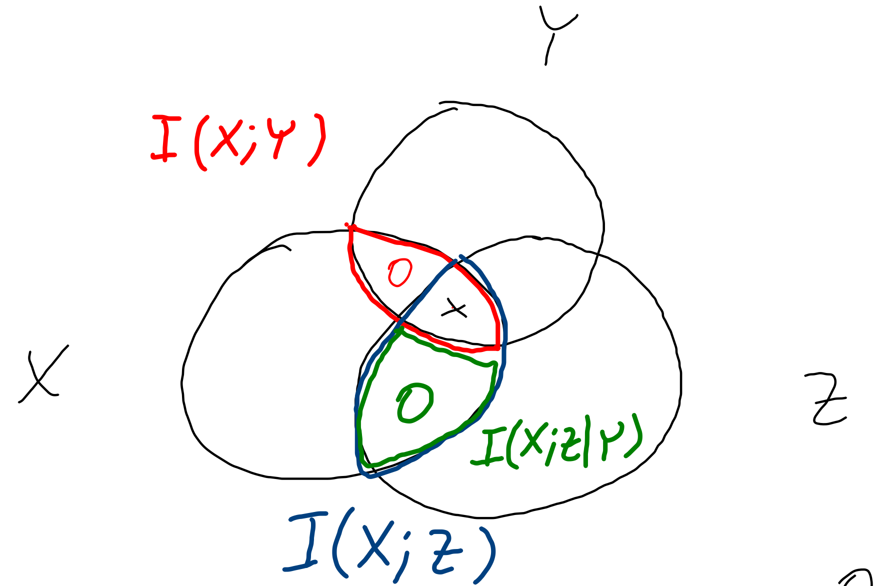
Se vale $X \to Y \to Z$, allora $I(X;Y) \geq I(X;Z)$.

Inoltre, si ha $I(X;Y) = I(X;Z)$ se e solo se $I(X;Y|Z) = 0$.
(cioè se e solo se vale anche la catena $X \to Z \to Y$)

Dim.

$$I(X;Z) = H(X) - H(X|Z) \overset{1^\circ \text{ teorema}}{\leq} H(X) - H(X|Y)$$
$$= I(X;Y).$$





Se vale $X \to Y \to Z$

allora $\boxed{I(X;Z|Y)} = 0$

$$\underbrace{I(X;Z|Y)}_{(X \cap Z) \setminus Y}$$

Quindi $I(X;Y) = I(X;Z)$

se e solo se

$I(X;Y|Z) = 0$

$(\iff X \to Z \to Y)$

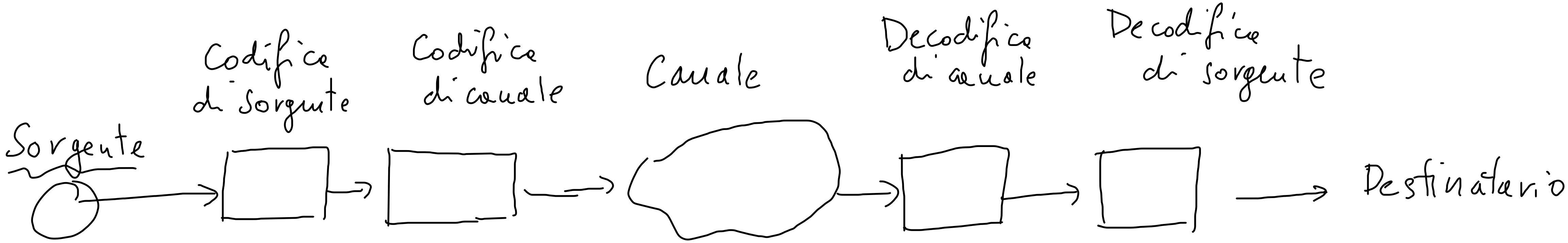
Corollario. Se $Z = g(Y)$, con $g : \mathcal{Y} \to \mathcal{Z}$ (deterministica)

allora $I(X;Y) \geq I(X;g(Y))$.

Dim. Osservo $H(g(Y)|X,Y) = 0$

$$H(g(Y)|Y) = 0$$

$\Rightarrow$ quindi vale la catena di Markov $X \to Y \to g(Y)$.



Sorgente

Istanti di tempo: t_0, t_1, t_2, t_3

v.a. rappresentanti i simboli: $X_{-1}, X_0, X_1, X_2, X_3, \dots$

Alfabeto: $\mathcal{X} = \{x_1, x_2, \dots, x_K\}$