Codifica di canale

$$X \in \mathcal{X} \longrightarrow \boxed{\text{Canale}} \longrightarrow Y \in \mathcal{Y}$$

$p_{Y|X}$

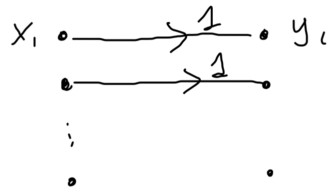
$$\Gamma = \begin{array}{c} \\ x_i \rightarrow \end{array} \begin{bmatrix} & \vdots & \\ \cdots & p(y_j|x_i) & \cdots \\ & \vdots & \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \#\text{righe} = \\ = |\mathcal{X}| \end{array}$$

$\#\text{colonne} = |\mathcal{Y}|$, y_j

Capacità di un canale: $C = \max\limits_{p_X} \underbrace{I(X;Y)}_{\text{dipende da } p_{XY}}$

$p(x,y) = p(x)\,\boxed{p(y|x)}$

- Canale senza rumore

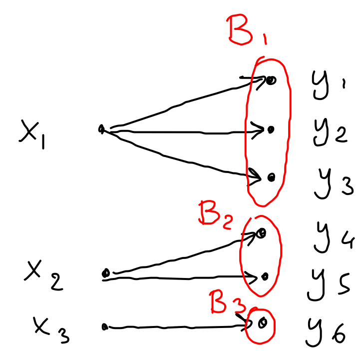


$\longrightarrow C = \log|\mathcal{X}|$

Es. se $|\mathcal{X}| = 256 \rightarrow C = 8$ bit

- Canale senza perdite:

ingresso è completamente determinato dall'uscita:



Esiste una partizione $B_1, B_2, \dots, B_m$ di $\mathcal{Y}$

tale che $Y \in B_i \Rightarrow X = x_i$

$m = |\mathcal{X}| \le |\mathcal{Y}| = s$

$$\boxed{H(X|Y) = 0}$$

$$I(X;Y) = H(X) - H(X|Y)$$
$$= H(Y) - H(Y|X)$$

$\forall$ d.d.p. p_X

$H(X) \le \log|\mathcal{X}| = \log m$, e $H(X) = \log m$ se p_X è uniforme

$$C = \max_{p_X} I(X;Y) = \max_{p_X} \left[H(X) - \cancel{H(X|Y)} \right]$$

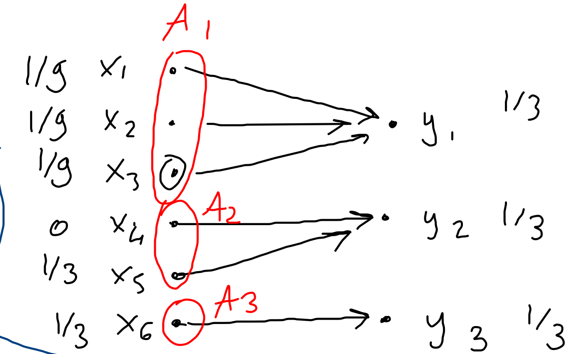
0

$$= \log m = \log|\mathcal{X}|$$

per p_X uniforme.

Canale deterministico

$\boxed{\text{L'uscita è completamente determinata dall'ingresso}}$



$$p(y_j|x_i) = \begin{cases} 1 & \text{se } x_i \in A_j \\ 0 & \text{se } x_i \notin A_j \end{cases}$$

$$\boxed{H(Y|X) = 0}$$

Chiamiamo $s := |\mathcal{X}| \geq |\mathcal{Y}| =: m$

→ Esiste una partizione $A_1, A_2, A_3, \dots, A_m$ tale che $X \in A_j \Rightarrow Y = y_j$

$$C = \max_{p_X} I(X;Y) = \max_{p_X} \left[H(Y) - \cancelto{0}{H(Y|X)} \right] = \max_{p_X} H(Y) = \max_{p_X} \underbrace{\left(- \sum_{j=1}^{m} p(y_j) \log p(y_j) \right)}_{\boxed{\text{sempre } \leq \log m}}$$

$$p(y_j) = \sum_{i \in A_j} p(x_i)$$

Ho $H(Y) = \log m$ se e solo se p_Y è uniforme su $\mathcal{Y}$

Se scelgo p_X tale che p_Y è uniforme (e questo è sempre possibile)

ottengo $H(Y) = \log m$

$$\left. \begin{array}{l} \boxed{C \geq \log m} \\ \boxed{C \leq \log m} \end{array} \right\} C = \log |\mathcal{Y}|$$

Canale inutile:

Canale in cui la matrice di transizione ha tutte le righe identiche:

$$\Gamma = \begin{array}{c} \\ \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_m \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_m \\ \vdots & & & \vdots \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_m \end{bmatrix} \\ \quad\; j=2 \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow x_1 \\ \leftarrow x_2 \\ \\ \leftarrow x_s \end{array}$$

Non dipende da i

$$p(y_j) = \sum_{i=1}^{s} \underbrace{p(x_i)\, p(y_j|x_i)}_{p(x_i, y_j)} = \alpha_j \overbrace{\sum_{i=1}^{s} p(x_i)}^{=1} = \alpha_j$$

$$\alpha_j = p(y_j|x_i)$$

$$p(y_j|x_1) = p(y_j|x_2) = \dots = p(y_j|x_s) = \alpha_j \qquad \left(\sum_{j=1}^{m} \alpha_j = 1\right)$$

$\rightarrow$ Le v.a. X e Y sono indipendenti

$\Rightarrow$ $H(Y|X) = H(Y)$ e $I(X;Y) = 0$

$\rightarrow$ la capacità del canale è $C = \max_{p_X} 0 = 0$

$\rightarrow$ non è possibile trasmettere informazione attraverso il canale

Canale simmetrico

Matrice di canale ha questa proprietà: $\begin{cases} \text{ogni riga è permutazione di qualunque altra riga} \\ \text{ogni colonna è permutazione di qualunque altra colonna} \end{cases}$

Sia $s = |\mathcal{X}|$, $m = |\mathcal{Y}|$

$$\Gamma = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1/6 & 1/3 & 1/2 \\ 1/2 & 1/6 & 1/3 \\ 1/3 & 1/2 & 1/6 \end{bmatrix} \end{array} \leftarrow x_1$$

L'entropia $H(Y|X=x_i)$ non dipende da x_i

(perché le righe contengono gli stessi elementi)

$$H(Y|X=x_1) = H((1/6, 1/3, 1/2))$$

$$= \tfrac{1}{6}\log 6 + \tfrac{1}{3}\log 3 + \tfrac{1}{2}\log 2$$

$$\shortparallel$$

$$H(Y|X=x_2) = H((1/2, 1/6, 1/3))$$

Quindi $H(Y|X) = \sum_{i=1}^{s} p(x_i) \underbrace{H(Y|X=x_i)}_{\text{non dipende dall'indice } i}$

$$= H(Y|X=x_1) \underbrace{\sum_{i=1}^{s} p(x_i)}_{=1} = H(Y|X=x_1)$$

Capacità $C = \max_{p_X} \left(H(Y) - H(Y|X)\right) =$

$$= \max_{p_X} \Big[H(Y) - \underbrace{H(Y|X=x_1)}_{\text{non dipende da } p_X} \Big] = \max_{p_X} \big[H(Y) \big] - H(Y|X=x_1).$$

$= \log|\mathcal{Y}| = \log m$

$H(Y) \le \log|\mathcal{Y}| = \log m$

(qualunque sia p_X)

$H(Y) = \log|\mathcal{Y}|$

si può scegliere p_X in modo

(*) tale che p_Y sia uniforme

$$p(y_j) = \sum_{i=1}^{s} p(x_i)\, p(y_j|x_i) = \frac{1}{s} \overbrace{\sum_{i=1}^{s} \underbrace{p(y_j|x_i)}_{\Gamma_{ij}}}^{\text{somma degli elementi nella } j\text{-esima colonna di } \Gamma}$$

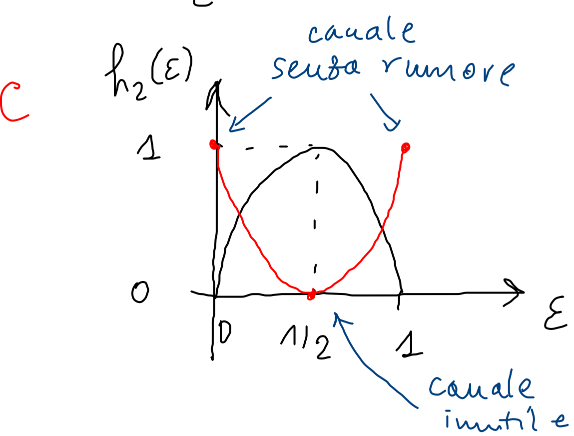
Scegliamo p_X uniforme : $p(x_i) = 1/s \quad \forall i = 1 \dots s$

Quindi $p(y_j)$ è una costante $\longrightarrow$ anche p_Y è uniforme

$$\longrightarrow C = \log m - H(Y|X = x_1).$$

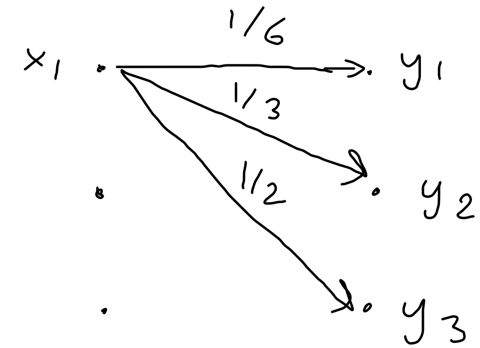
Esempio : Canale binario simmetrico

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 1-\varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 1-\varepsilon \end{bmatrix} \quad \to C = \log 2 - \underbrace{H((1-\varepsilon, \varepsilon))}_{\substack{h_2(\varepsilon) \\ \text{Funzione entropia} \\ \text{binaria}}} = 1 - h_2(\varepsilon).$$



Esempio.

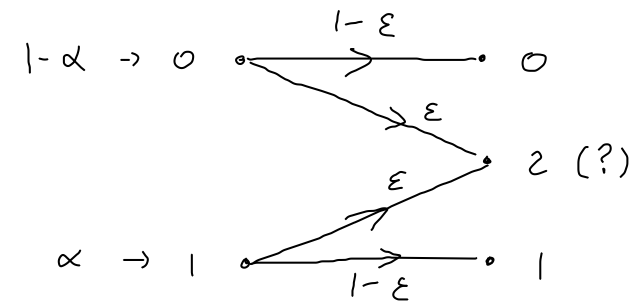
$$\Gamma = \begin{bmatrix} 1/6 & 1/3 & 1/2 \\ 1/2 & 1/6 & 1/3 \\ 1/3 & 1/2 & 1/6 \end{bmatrix}$$



$$C = \log|Y| - H(Y \mid X = x_1)$$

$$= \log 3 - H\left(\left(\tfrac{1}{6}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{2}\right)\right) = \tfrac{1}{2}\log 3 - \tfrac{2}{3}$$

Canale con cancellazione



(caso di cancellazione)

$$\Gamma = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1-\varepsilon & 0 & \varepsilon \\ 0 & 1-\varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix} \\ \;\; Y=0 \quad Y=1 \quad Y=2 \end{array} \qquad \begin{array}{l} X=0=x_1 \\ X=1=x_2 \end{array}$$

Poiché le righe sono una permutazione dell'altra,

$$H(Y|X) = H(Y|X=x_1) = H((1-\varepsilon, 0, \varepsilon)) = H((1-\varepsilon, \varepsilon)) = h_2(\varepsilon)$$

Capacità $C = \max_{p_X} [H(Y) - H(Y|X)] = \max_{p_X} [H(Y) - \underbrace{h_2(\varepsilon)}_{\text{non dipende da } p_X}] =$

$$\longrightarrow \; = \max_{p_X} H(Y) - h_2(\varepsilon)$$

Quanto vale $H(Y)$?

Supponiamo che $p_X = (1-\alpha, \alpha)$ per qualche $\alpha \in [0,1]$

$$p(Y=0) = p(X=0 \wedge Y=0) =$$
$$= p(Y=0|X=0) \cdot p(X=0) = (1-\alpha)(1-\varepsilon)$$
$$p(Y=1) = p(Y=1|X=1) \cdot p(X=1) = (1-\varepsilon)\alpha = \alpha(1-\varepsilon)$$
$$p(Y=2) = p(Y=2|X=0) \cdot p(X=0) + p(Y=2|X=1) \cdot p(X=1) = (1-\alpha)\varepsilon + \alpha \cdot \varepsilon = \varepsilon$$

$$H(Y) = -(1-\alpha)(1-\varepsilon)\log\big((1-\alpha)(1-\varepsilon)\big) - \alpha(1-\varepsilon)\log\big(\alpha(1-\varepsilon)\big) - \varepsilon\log\varepsilon$$

$$= \dots = (1-\varepsilon)\,h_2(\alpha) + h_2(\varepsilon)$$

$$C = \max_{p_X} H(Y) - h_2(\varepsilon) = \max_{p_X}\Big((1-\varepsilon)h_2(\alpha) + \cancel{h_2(\varepsilon)}\Big) \cancel{- h_2(\varepsilon)}$$

$$= (1-\varepsilon)\max_{\alpha\in[0,1]} h_2(\alpha) \underset{\text{per } \alpha = 1/2}{=} (1-\varepsilon)\cdot 1 = 1-\varepsilon.$$