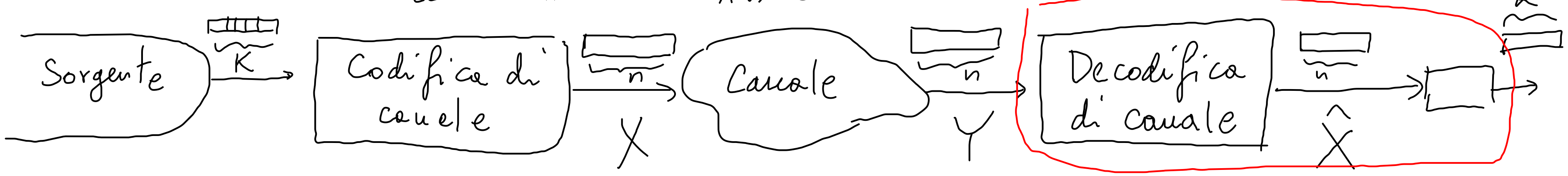
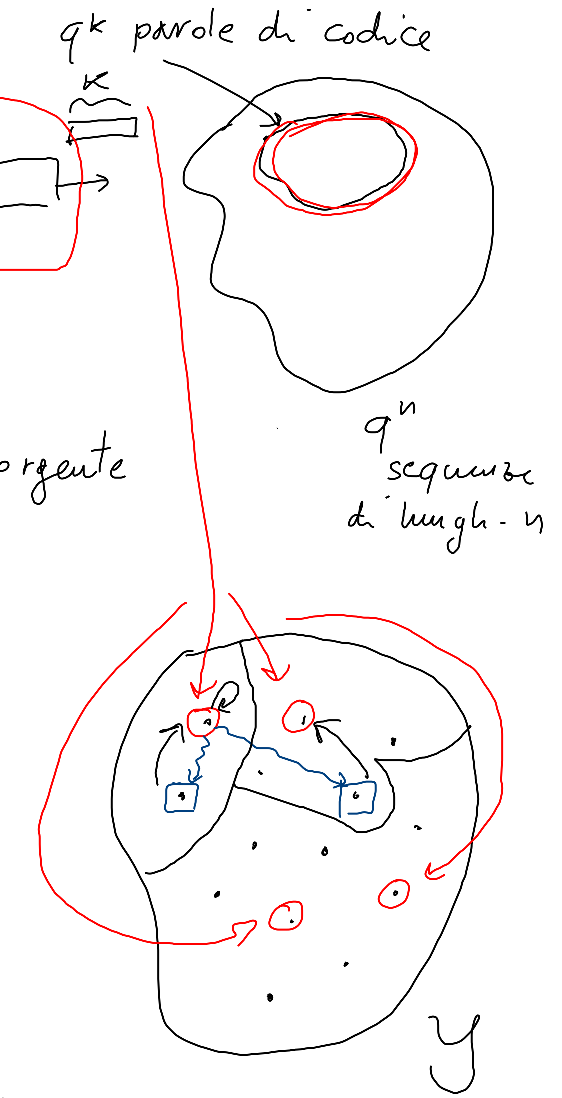
Criteri di Decodifica di Canale





$X \in \mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_M\}$ parole di codice (ingresso del canale)

(tipicamente $M = q^K$ dove q è la cardinalità dell'alfabeto della sorgente e $K \geq 1$)

$Y \in \mathcal{Y} = \{y_1, y_2, \dots, y_{q^n}\}$ n-ple di q-it di uscita

Tasso del codice: $R = \dfrac{\log_q M}{n}$; se $M = q^K$, $R = K/n$.

K = lunghezza dei messaggi, n = lunghezza delle parole di codice

q^k messaggi $\longleftrightarrow$ q^k parole di codice ($\mathcal{X}$)

Funzione di decodifica

$$\psi : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$$

q^n $\quad$ q^k

Le sequenze in $\mathcal{Y}$ che vengono decodificate nella stessa parola di codice x_i, formano una classe di equivalenza. (regione di decodifica)

Esempio: codice (binario) a ripetizione di lunghezza 3

$\{\overset{k}{0}, \overset{k}{1}\}$ $\quad \mathcal{X} = \{\overset{n}{000}, \overset{n}{111}\}$ $\quad \mathcal{Y} = \{\underbrace{000, 001, 010, 100}_{\text{Decodifico in } 000}, \underbrace{101, 110, 011, 111}_{\text{Decodifico in } 111}\}$

$\psi : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$

$q^k = M = 2 = 2^1 \qquad k = 1 \qquad n = 3 \qquad q = 2 \qquad q^n = 2^3 = 8 = |\mathcal{Y}|$

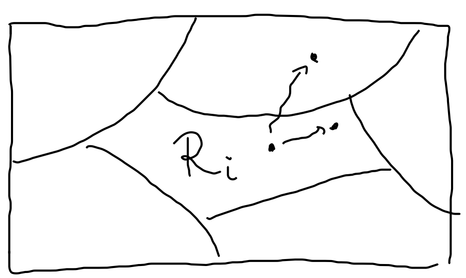
$0 \longmapsto 000 \longmapsto$ ϟϟϟ $\longmapsto 010 \longmapsto 000 \longmapsto 0$ OK; errore è stato corretto

$\psi(010) = 000$

$0 \longmapsto 000 \longmapsto$ ϟϟϟ $\longmapsto 011 \longmapsto 111 \longmapsto 1$ errore di decodifica!

$\psi(011) = 111$

$\mathcal{Y}$



R_i : regione di decodifica consistente di tutte le n-ple y tali che $\psi(y) = x_i$

$\to$ $\mathcal{Y}$ è partizionato nelle regioni $R_1, R_2, \dots, R_M$

Chiamo $\overline{R}_i = \mathcal{Y} \setminus R_i$

Se trasmetto x_i ma ricevo una sequenza $y \notin R_i$ $(y \in \overline{R}_i)$,
allora commetto un errore di decodifica

Probabilità di errata decodifica quando l'ingresso del canale è x_i:

$$p_{err}(x_i) = \sum_{y \in \overline{R}_i} p(y|x_i)$$

dipende dalla sorgente

dipende dal canale

Probabilità di errata decodifica:

$$p_{err} = \sum_{i=1}^{M} p(x_i)\, p_{err}(x_i) = \sum_{i=1}^{M} p(x_i) \sum_{y \in \overline{R}_i} p(y|x_i)$$

dipende dal decodificatore

Vogliamo scegliere le R_i in modo tale da minimizzare p_{err}.

Criterio dell'osservatore ideale

Probabilità di errata decodifica quando l'uscita del canale è y:

$$P_{err}(y) = \Pr[\hat{X} \neq X \mid Y = y] = 1 - \Pr[\hat{X} = X \mid Y = y]$$

Mediando sulle uscite:

$$P_{err} = \sum_{y \in \mathcal{Y}} p(y)\, P_{err}(y) = \sum_{y \in \mathcal{Y}} p(y) \left(1 - \Pr[\hat{X} = X \mid Y = y] \right)$$

$$= 1 - \underbrace{\sum_{y \in \mathcal{Y}} p(y) \Pr[\hat{X} = X \mid Y = y]}_{(*)}$$

dipendono dalla combinazione di sorgente e canale $p(x)$ $p(y|x)$

$p(y) = p(x)\,p(y|x)$; non dipendono dal decodificatore

Per minimizzare P_{err}, devo massimizzare $(*)$

$p(x_1|y)$

$p(x_2|y)$

$\vdots$

$p(x_M|y)$

$p(\hat{x}|y)$

Scelgo $\hat{x} = x_i$ dove x_i massimizza $p(x_i|y)$

$$\boxed{\hat{x} = \arg\max_{x_i} p(x_i|y)}$$

$\rightarrow$ Decodifico y in x_i se per ogni $j \neq i$, ho $p(x_i|y) \geq p(x_j|y)$

$(\psi(y) = x_i)$ $p(x|y)$

$$p(x|y) \overset{\text{Bayes}}{=} \frac{p(x)\,p(y|x)}{p(y)}$$

$\leftarrow$ caratteristiche del canale $p(y_j|x_i)$

caratteristiche della sorgente

$\rightarrow$ Il decodificatore va calibrato sia sul canale che sulla sorgente.

=

Criterio della decodifica a massimo verosimiglianza

Osservazione: Un buon codificatore di sorgente è tale che la distribuzione sui messaggi della sorgente è uniforme (o quasi uniforme). $\rightarrow$ le $p(x)$ sono costanti

Ho

$$p(x_i|y) \geq p(x_j|y) \longleftrightarrow \frac{\cancel{p(x_i)}\,p(y|x_i)}{\cancel{p(y)}} \geq \frac{\cancel{p(x_j)}\,p(y|x_j)}{\cancel{p(y)}}$$

$\rightarrow$ sono uguali, per la nostra assunzione

$\rightarrow$ Criterio: scegli x_i che massimizza $p(y|x_i)$;

$$\boxed{\hat{x} = \underset{x_i}{\operatorname{argmax}}\ p(y|x_i)}$$

Più la d.p. di ingresso si allontana dall'assunzione di uniformità, più il criterio di decodifica a massima verosimiglianza si discosta dall'ottimalità.

Teorema della codifica di canale

Compromesso possibile tra prob. di errata decodifica (p_{err}), tasso del codice (R), capacità del canale (C), entropia della sorgente ($H(S)$)

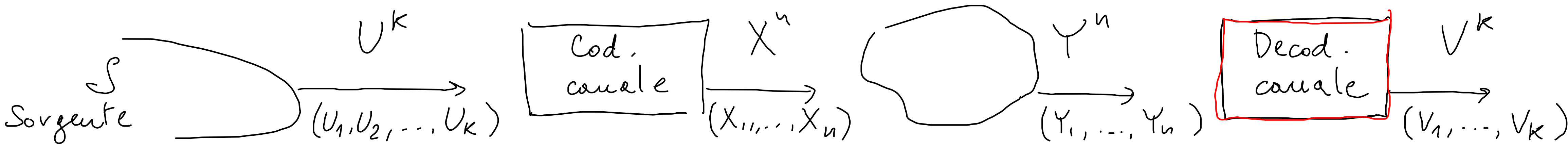
Consideriamo per esempio una sorgente binaria con $H(S) = 1$.

- Parte diretta: (risultato positivo)

(*) Se il tasso del codice è minore della capacità C del canale, esistono codici di canale con prob. di errata decodifica infinitesima.

- Parte inversa: (risultato negativo)

(*) Se il tasso del codice è maggiore della capacità C del canale, allora <u>non</u> esiste nessun codice di canale con p_{err} infinitesima (anzi $p_{err} \to 1$)



Vorrei $V^k = U^k$; o comunque massimizzare $\Pr(U^k = V^k)$

$U^k = (U_1, \dots, U_k)$ messaggio sorgente

$X^n = (X_1, \dots, X_n)$ parola di codice

$Y^n = (Y_1, \dots, Y_n)$ sequenza uscente dal canale

$\hat{U}^k = V^k = (V_1, \dots, V_k)$ ricostruzione (o stima) di U^k

Codifica di canale $\quad \mathcal{C} = \{x_1, \dots, x_M\}$

$$\psi : y \mapsto x_i$$

Lemma (4.1). In ogni canale (stazionario e senza memoria), di capacità C,

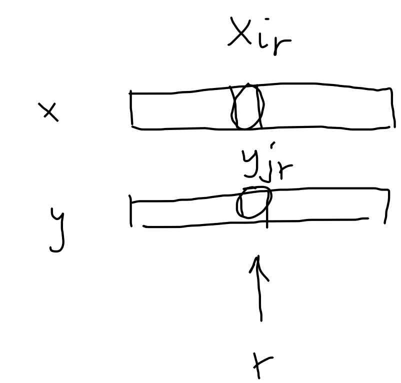
$$I(X^n; Y^n) \leq n\, C.$$

Lemma (4.1). In ogni canale (stazionario e senza memoria), di capacità C,

$$I(X^n;Y^n) \le nC.$$

Dim. Ricordiamo che la stazionarietà e assenza di memoria implicano:

$$p(y|x) = \prod_{r=1}^{n} p(y_{j_r}|x_{i_r})$$



Quindi (per un risultato già visto)

$$I(X^n;Y^n) \le \sum_{i=1}^{n} I(X_i;Y_i)$$

Quindi $I(X^n;Y^n) \le \sum_{i=1}^{n} I(X_i;Y_i) \le \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\max_{p_X} I(X_1;Y_i)}_{\le C} = nC.$

QED.

Teorema (inverso di Fano). Se $H(S) > C/R$

allora la prob. di errata decodifica per rimane limitata inferiormente da una costante positiva.