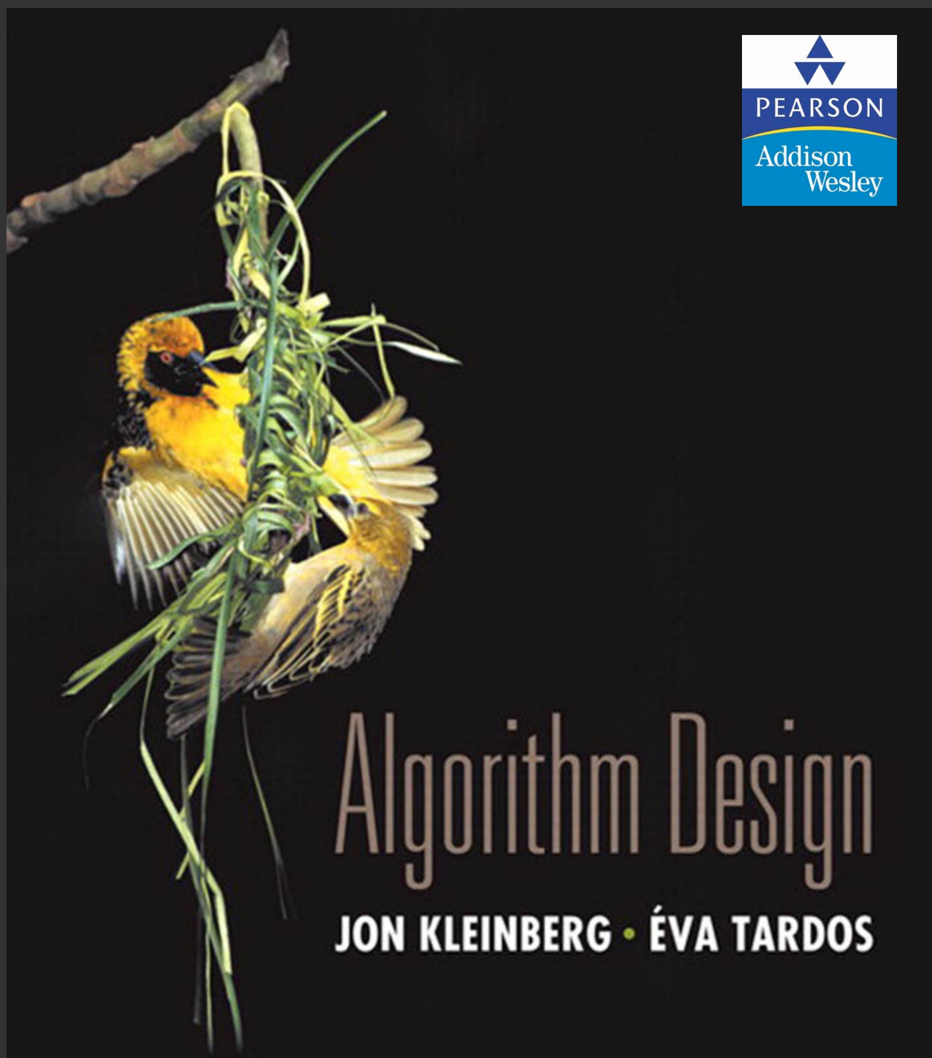


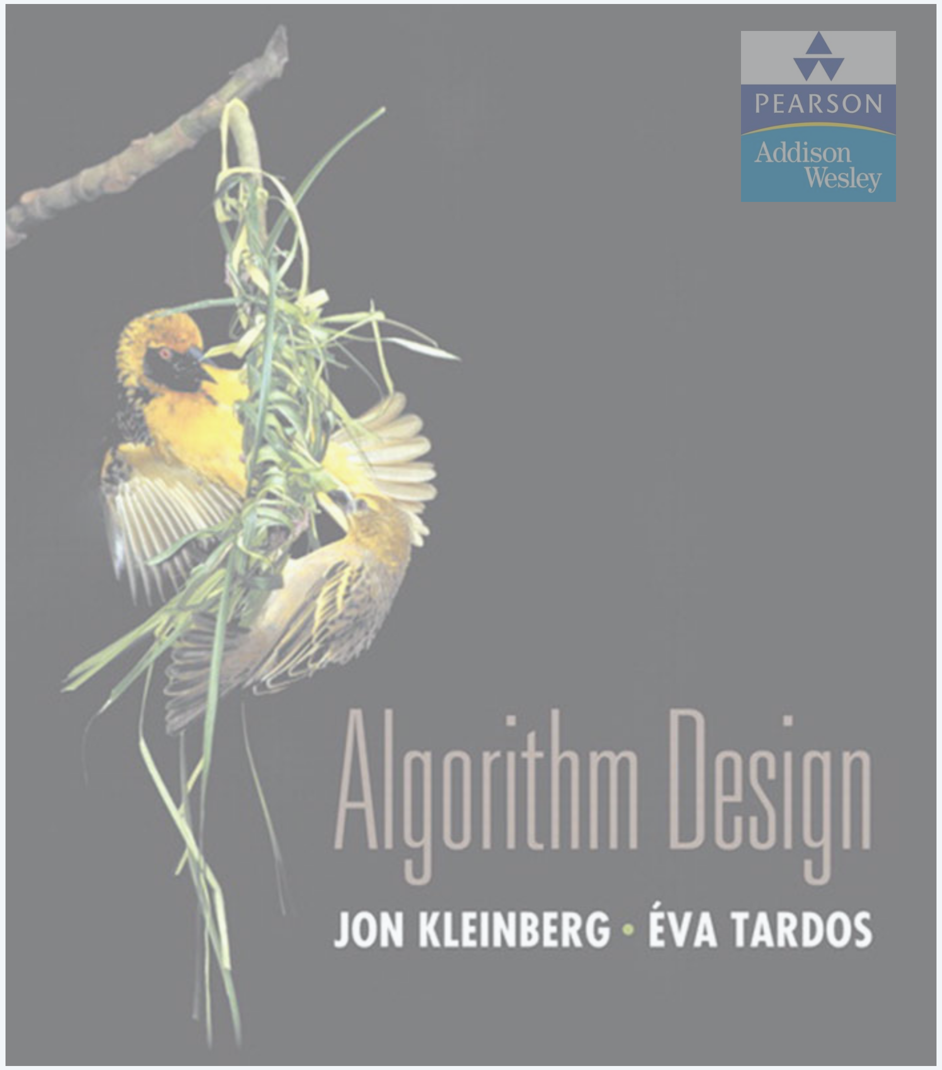
Traduzione e adattamento di Vincenzo Bonifaci
Original lecture slides by Kevin Wayne

http://www.cs.princeton.edu/~wayne/kleinberg-tardos

1. Abbinamento Stabile

- *problema dell'abbinamento stabile*
- *algoritmo Gale–Shapley*
- *ottimalità lato ospedali*
- *contesto*

Last updated on 29/02/2024 11:26



SECTION 1.1

1. ABBINAMENTO STABILE

- *problema dell'abbinamento stabile*
- *algoritmo di Gale-Shapley*
- *ottimalità lato ospedali*
- *contesto*

Abbinare specializzandi di medicina a degli ospedali

Obiettivo. Dato un insieme di preferenze tra specializzandi di medicina ed ospedali, progettare un processo di ammissione robusto.

Coppia instabile. Ospedale h e studente s formano una coppia instabile se valgono entrambe le seguenti condizioni:

- h preferisce s ad uno degli studenti ammessi ad h.
- s preferisce h all'ospedale a lui/lei assegnato.

Assegnazione stabile. Un'assegnazione senza coppie instabili.

- Condizione naturale e desiderabile.
- L'interesse individuale previene accordi "collaterali" ospedale–studente.

Problema dell'abbinamento stabile: input

uno studente per ospedale (per ora)

Input. Un insieme di n ospedali H ed un insieme di n studenti S.

- Ogni ospedale $h \in H$ ha una graduatoria di studenti.
- Ogni studente $s \in S$ ha una graduatoria di ospedali.

	preferito		meno preferito
	1st	2nd	3rd
Atlanta	Xavier	Yolanda	Zeus
Boston	Yolanda	Xavier	Zeus
Chicago	Xavier	Yolanda	Zeus

liste di preferenze ospedali

	preferito		meno preferito
	1st	2nd	3rd
Xavier	Boston	Atlanta	Chicago
Yolanda	Atlanta	Boston	Chicago
Zeus	Atlanta	Boston	Chicago

liste di preferenze studenti

Abbinamenti perfetti

Def. Un abbinamento M è un insieme di coppie ordinate h–s con $h \in H$ e $s \in S$ tale che

- Ogni ospedale $h \in H$ compare in al più una coppia di M.
- Ogni studente $s \in S$ compare in al più una coppia di M.

Def. Un abbinamento M è perfetto se $|M| = |H| = |S| = n$.

	1st	2nd	3rd
Atlanta	Xavier	Yolanda	Zeus
Boston	Yolanda	Xavier	Zeus
Chicago	Xavier	Yolanda	Zeus

	1st	2nd	3rd
Xavier	Boston	Atlanta	Chicago
Yolanda	Atlanta	Boston	Chicago
Zeus	Atlanta	Boston	Chicago

un abbinamento perfetto M = { A–Z, B–Y, C–X }

Coppia instabile

Def. Dato un abbinamento perfetto M, un ospedale h e uno studente s formano una coppia instabile se valgono entrambe:

- h preferisce s ad uno degli studenti ammessi ad h.
- s preferisce h all'ospedale a lui/lei assegnato.

Punto chiave. Una coppia instabile h–s potrebbe trarre vantaggio da un'accordo collaterale.

	1st	2nd	3rd
Atlanta	Xavier	Yolanda	Zeus
Boston	Yolanda	Xavier	Zeus
Chicago	Xavier	Yolanda	Zeus

	1st	2nd	3rd
Xavier	Boston	Atlanta	Chicago
Yolanda	Atlanta	Boston	Chicago
Zeus	Atlanta	Boston	Chicago

A–Y è una coppia instabile per l'abbinamento M = { A–Z, B–Y, C–X }

Abbinamento stabile: quiz 1

Quale coppia è instabile nell'abbinamento { A–X, B–Z, C–Y } ?

A. A–Y.

B. B–X.

C. B–Z.

D. Nessuna delle precedenti.

	1st	2nd	3rd
Atlanta	Xavier	Yolanda	Zeus
Boston	Yolanda	Xavier	Zeus
Chicago	Xavier	Yolanda	Zeus

	1st	2nd	3rd
Xavier	Boston	Atlanta	Chicago
Yolanda	Atlanta	Boston	Chicago
Zeus	Atlanta	Boston	Chicago

Abbinamento stabile: quiz 1

Quale coppia è instabile nell'abbinamento { A–X, B–Z, C–Y } ?

A. A–Y.

B. B–X.

C. B–Z.

D. Nessuna delle precedenti.

	1st	2nd	3rd
Atlanta	Xavier	Yolanda	Zeus
Boston	Yolanda	Xavier	Zeus
Chicago	Xavier	Yolanda	Zeus

	1st	2nd	3rd
Xavier	Boston	Atlanta	Chicago
Yolanda	Atlanta	Boston	Chicago
Zeus	Atlanta	Boston	Chicago

B–X è una coppia instabile

Problema dell'abbinamento stabile

Def. Un abbinamento stabile è un abbinamento perfetto che non ha coppie instabili.

Problema dell'abbinamento stabile. Data la lista di preferenze di n ospedali e n studenti, trovare un abbinamento stabile (se ne esiste uno).

	1st	2nd	3rd
Atlanta	Xavier	Yolanda	Zeus
Boston	Yolanda	Xavier	Zeus
Chicago	Xavier	Yolanda	Zeus

	1st	2nd	3rd
Xavier	Boston	Atlanta	Chicago
Yolanda	Atlanta	Boston	Chicago
Zeus	Atlanta	Boston	Chicago

un abbinamento stabile M = { A–X, B–Y, C–Z }

Problema dei compagni di stanza stabili

D. Un abbinamento stabile esiste sempre?

R. A priori non è ovvio.

Problema dei compagni di stanza stabili.

- $2n$ persone; ciascuna persona classifica le altre da 1 a $2n - 1$.
- Assegnare coppie di compagni di stanza evitando coppie instabili.

	1st	2nd	3rd
A	B	C	D
B	C	A	D
C	A	B	D
D	A	B	C

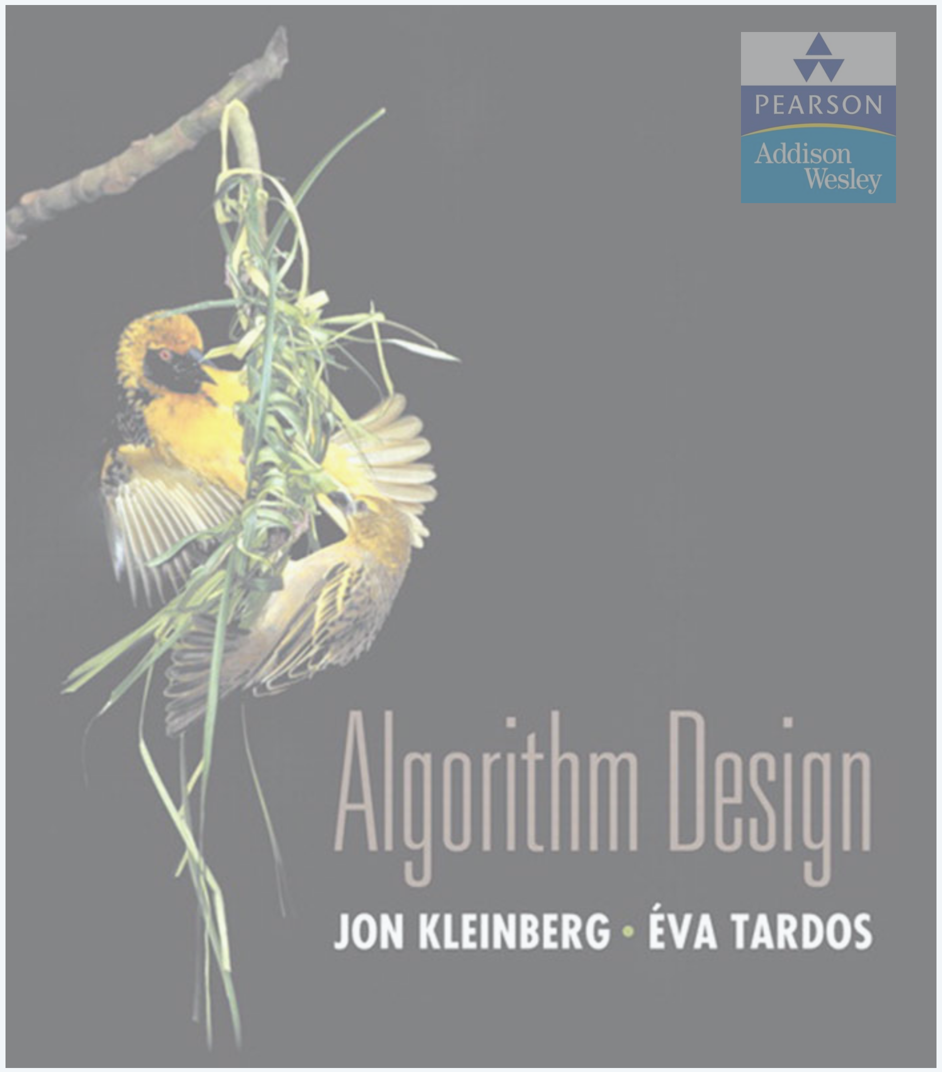
nessun abbinamento perfetto è stabile

A–B, C–D $\Rightarrow$ B–C instabile

A–C, B–D $\Rightarrow$ A–B instabile

A–D, B–C $\Rightarrow$ A–C instabile

Osservazione. In generale, gli abbinamenti stabili possono non esistere.



SECTION 1.1

1. ABBINAMENTO STABILE

- *problema dell'abbinamento stabile*
- *algoritmo Gale–Shapley*
- *ottimalità lato ospedali*
- *contesto*

Algoritmo Gale–Shapley di accettazione differita

Un metodo intuitivo che garantisce di determinare un abbinamento stabile.

GALE–SHAPLEY (*liste di preferenze per ospedali e studenti*)

INIZIALIZZA M all'abbinamento vuoto.

WHILE (qualche ospedale h non è abbinato e non si è già proposto a tutti gli studenti)

$s \leftarrow$ primo studente sulla lista di h a cui h non si è ancora proposto.

IF (s non è abbinato)

Aggiungi h–s all'abbinamento M.

ELSE IF (s preferisce h al suo partner attuale h')

Rimpiazza h'–s con h–s nell'abbinamento M.

ELSE

s rifiuta h.

RETURN abbinamento stabile M.

Dimostrazione di correttezza: terminazione

Osservazione 1. Gli ospedali si propongono agli studenti in ordine decrescente di preferenza.

Osservazione 2. Una volta che uno studente è stato abbinato, rimane abbinato per tutto il tempo; può solo "guadagnare" dai cambi.

Prop. L'algoritmo termina dopo al più n^2 iterazioni del ciclo WHILE.

Dim. Ad ogni passo del ciclo WHILE, un ospedale si propone ad un nuovo studente. Quindi, ci sono al più n^2 possibili proposte. ▪

	1st	2nd	3rd	4th	5th
A	V	W	X	Y	Z
B	W	X	Y	V	Z
C	X	Y	V	W	Z
D	Y	V	W	X	Z
E	V	W	X	Y	Z

	1st	2nd	3rd	4th	5th
V	B	C	D	E	A
W	C	D	E	A	B
X	D	E	A	B	C
Y	E	A	B	C	D
Z	A	B	C	D	E

n(n−1) + 1 proposte

Dimostrazione di correttezza: abbinamento perfetto

Prop. Gale–Shapley restituisce un abbinamento.

Dim.

- Ospedale si propone solo se non abbinato $\Rightarrow$ abbinato a $\leq$ 1 studenti
- Studente tiene solo il miglior ospedale. $\Rightarrow$ abbinato a $\leq$ 1 ospedali

Prop. Nell'algoritmo di Gale-Shapley, tutti gli ospedali vengono abbinati.

Dim. [per assurdo]

- Supponiamo per assurdo che qualche ospedale $h \in H$ sia non abbinato al termine dell'algoritmo di Gale-Shapley.
- Allora qualche studente, sia $s \in S$, è non abbinato al termine.
- Per l'Osservazione 2, s non ha mai ricevuto proposte.
- Ma, h si è proposto ad ogni studente, poiché h risulta non abbinato. ※

Prop. Nell'algoritmo di Gale-Shapley, tutti gli studenti vengono abbinati.

Dim. [per conteggio]

- Per la proposizione precedente, tutti gli n ospedali sono abbinati.
- Quindi, tutti gli n studenti sono abbinati. ▪

Dimostrazione di correttezza: stabilità

Prop. Nell'abbinamento di Gale-Shapley M^*, non vi sono coppie instabili.

Dim. Consideriamo una coppia h–s che non appartiene ad M^*.

- Caso 1: h non si è mai proposto ad s.
  - $\Rightarrow$ h preferisce il suo partner s' ad s.
  - $\Rightarrow$ h–s non è instabile.

gli ospedali propongono in ordine decrescente di preferenza

- Caso 2: h si è proposto ad s.
  - $\Rightarrow$ s ha rifiutato h (immediatamente o più tardi)
  - $\Rightarrow$ s preferisce il suo partner h' ad h.
  - $\Rightarrow$ h–s non è instabile.

gli studenti possono solo "guadagnare"

- In ogni caso, la coppia h–s non è instabile. ▪

$h - s'$

$h' - s$

$\vdots$

Abbinamento M*

Riepilogo

Problema dell'abbinamento stabile. Dati n ospedali e n studenti, con le loro liste di preferenze, determinare un abbinamento stabile se ne esiste uno.

Teorema. [Gale–Shapley 1962] L'algoritmo di Gale-Shapley garantisce di trovare un abbinamento stabile per qualunque istanza del problema.

COLLEGE ADMISSIONS AND THE STABILITY OF MARRIAGE

D. GALE* AND L. S. SHAPLEY, Brown University and the RAND Corporation

1. Introduction. The problem with which we shall be concerned relates to the following typical situation: A college is considering a set of n applicants of which it can admit a quota of only q. Having evaluated their qualifications, the admissions office must decide which ones to admit. The procedure of offering admission only to the q best-qualified applicants will not generally be satisfactory, for it cannot be assumed that all who are offered admission will accept. Accordingly, in order for a college to receive q acceptances, it will generally have to offer to admit more than q applicants. The problem of determining how many and which ones to admit requires some rather involved guesswork. It may not be known (a) whether a given applicant has also applied elsewhere; if this is known it may not be known (b) how he ranks the colleges to which he has applied; even if this is known it will not be known (c) which of the other colleges will offer to admit him. A result of all this uncertainty is that colleges can expect only that the entering class will come reasonably close in numbers to the desired quota, and be reasonably close to the attainable optimum in quality.

Domande cui dobbiamo ancora rispondere

D. Come si implementa Gale-Shapley in modo efficiente?

R. Sarà oggetto di discussione successiva.

D. Se esiste più di un abbinamento stabile, qual è quello trovato dall'algoritmo?

Abbinamento stabile: quiz 2

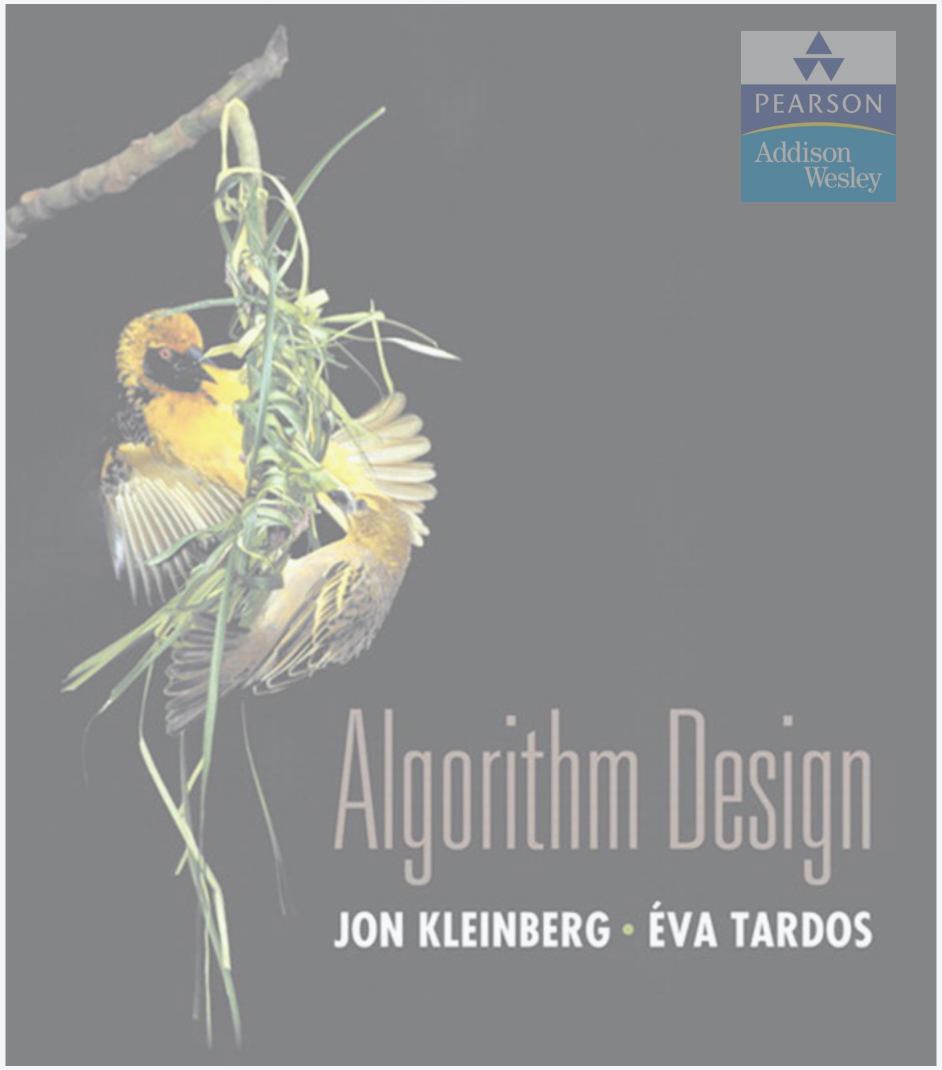
Tutte le esecuzioni dell'algoritmo di Gale–Shapley conducono allo stesso abbinamento stabile?

A. No, perché l'algoritmo è in parte nondeterministico.

B. No, perché ogni istanza può avere più abbinamenti stabili.

C. Sì, perché ogni istanza ha un unico abbinamento stabile.

D. Sì, nonostante un'istanza possa avere vari abbinamenti stabili e l'algoritmo sia in parte nondeterministico.



SECTION 1.1

1. ABBINAMENTO STABILE

- *problema dell'abbinamento stabile*
- *algoritmo Gale–Shapley*
- *ottimalità lato ospedali*
- *contesto*

Comprendere la soluzione

Per una data istanza del problema, possono esistere più abbinamenti stabili.

	1st	2nd	3rd
A	X	Y	Z
B	Y	X	Z
C	X	Y	Z

	1st	2nd	3rd
X	B	A	C
Y	A	B	C
Z	A	B	C

un'istanza con due abbinamenti stabili: S = { A–X, B–Y, C–Z } e S′ = { A–Y, B–X, C–Z }

Comprendere la soluzione

Def. Lo studente s è un partner valido per l'ospedale h se esiste un abbinamento stabile nel quale h ed s sono abbinati.

Es.

- Sia X che Y sono partner validi per A.
- Sia X che Y sono partner validi per B.
- Z è l'unico partner valido per C.

	1st	2nd	3rd
A	X	Y	Z
B	Y	X	Z
C	X	Y	Z

	1st	2nd	3rd
X	B	A	C
Y	A	B	C
Z	A	B	C

un'istanza con due abbinamenti stabili: S = { A–X, B–Y, C–Z } e S′ = { A–Y, B–X, C–Z }

Abbinamento stabile: quiz 3

Chi è il miglior partner valido per W nell'istanza seguente?

A.

B.

C.

D.

6 abbinamenti stabili

{ A–W, B–X, C–Y, D–Z }

{ A–X, B–W, C–Y, D–Z }

{ A–X, B–Y, C–W, D–Z }

{ A–Z, B–W, C–Y, D–X }

{ A–Z, B–Y, C–W, D–X }

{ A–Y, B–Z, C–W, D–X }

	1st	2nd	3rd	4th
A	Y	Z	X	W
B	Z	Y	W	X
C	W	Y	X	Z
D	X	Z	W	Y

	1st	2nd	3rd	4th
W	D	A	B	C
X	C	B	A	D
Y	C	B	A	D
Z	D	A	B	C

Abbinamento stabile: quiz 3

Chi è il miglior partner valido per W nell'istanza seguente?

A.

B.

C.

D.

6 abbinamenti stabili

{ A–W, B–X, C–Y, D–Z }

{ A–X, B–W, C–Y, D–Z }

{ A–X, B–Y, C–W, D–Z }

{ A–Z, B–W, C–Y, D–X }

{ A–Z, B–Y, C–W, D–X }

{ A–Y, B–Z, C–W, D–X }

miglior partner valido

partner validi

	1st	2nd	3rd	4th
A	Y	Z	X	W
B	Z	Y	W	X
C	W	Y	X	Z
D	X	Z	W	Y

	1st	2nd	3rd	4th
W	D	A	B	C
X	C	B	A	D
Y	C	B	A	D
Z	D	A	B	C

Comprendere la soluzione

Def. Lo studente s è un partner valido per l'ospedale h se esiste un abbinamento stabile nel quale h ed s sono abbinati.

Assegnazione ottima per gli ospedali. Ciascun ospedale riceve il miglior partner valido.

- È un abbinamento perfetto?
- È un abbinamento stabile?

Prop. Tutte le esecuzioni di Gale–Shapley costruiscono l'assegnazione ottima per gli ospedali.

Corollario. L'assegnazione ottima per gli ospedali è un abbinamento stabile!

Ottimalità per gli ospedali

Prop. L'abbinamento di Gale–Shapley M^* è ottimo per gli ospedali.

Dim. [per assurdo]

- Sia un ospedale abbinato ad uno studente che non è il miglior partner.
- Gli ospedali fanno proposte in ordine decrescente di preferenza

  $\Rightarrow$ qualche ospedale è rifiutato da un partner valido durante Gale–Shapley
- Sia h il primo ospedale siffatto, e sia s il primo partner valido che rifiuta h.
- Sia M un abbinamento stabile in cui h e s sono abbinati.
- Quando s rifiuta h in Gale–Shapley, s si lega (o conferma) ad un altro ospedale; sia esso h'.

  $\Rightarrow$ $\boxed{s \text{ preferisce } h' \text{ ad } h.}$ ← gli studenti "guadagnano" solamente
- Sia s' il partner di h' in M.
- h' non è stato ancora rifiutato da nessun partner valido (incluso s') nel momento in cui h è rifiutato da s. ← perché questo è il primo rifiuto da un partner valido
- Quindi, h' non si è ancora proposto ad s' quando h' si è proposto ad s.

  $\Rightarrow$ $\boxed{h' \text{ preferisce } s \text{ ad } s'.}$ ← gli ospedali fanno proposte in ordine di preferenza
- Quindi, h'–s è instabile in M; contraddizione. ▪

$h - s$

$h' - s'$

$\vdots$

abbinamento stabile M

Pessimalità per gli studenti

D. L'ottimalità per gli ospedali avviene a scapito degli studenti?
R. Sì.

Assegnazione pessima per gli studenti. Ciascuno studente riceve il peggior partner valido.

Prop. Gale–Shapley trova l'abbinamento stabile M^* pessimo per gli studenti.
Dim. [per assurdo]

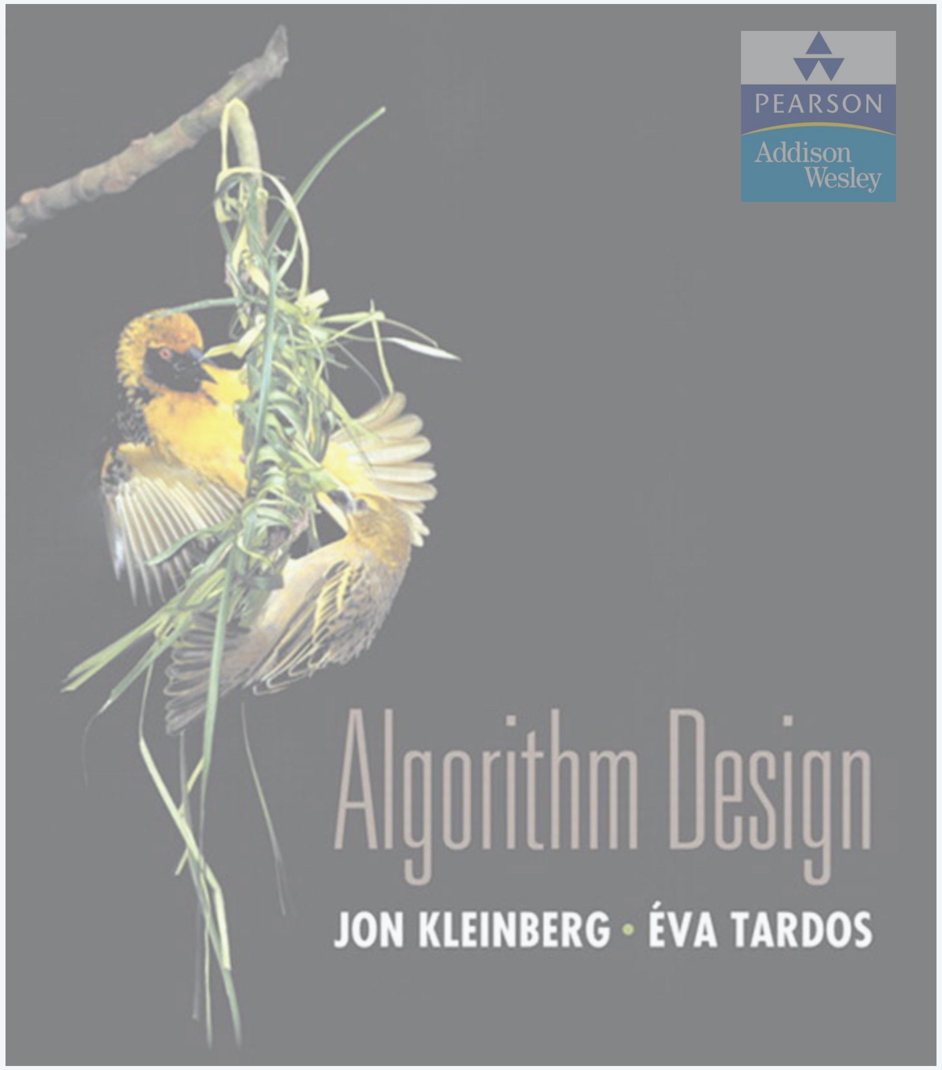
- Siano h–s abbinati in M^* con $h \neq$ dal peggior partner valido per s.
- Esiste un abbinamento stabile M in cui s è abbinato ad un ospedale, sia esso h', che s preferisce meno di h.
  $\Rightarrow$ $\boxed{s \text{ preferisce } h \text{ ad } h'.}$
- Sia s' il partner di h in M.
- Dall'ottimalità lato ospedali, s è il miglior partner valido per h.
  $\Rightarrow$ $\boxed{h \text{ preferisce } s \text{ ad } s'.}$
- Quindi, h–s è una coppia instabile in M; contraddizione. ▪

$h' - s$

$h - s'$

$\vdots$

abbinamento stabile M



SECTION 1.1

1. ABBINAMENTO STABILE

- problema dell'abbinamento stabile
- algoritmo Gale–Shapley
- ottimalità lato ospedali
- contesto

Estensioni

Estensione 1. Alcuni agenti dichiarano altri come inaccettabili.

Estensione 2. Alcuni ospedali offrono più di un posto.

Estensione 3. Diverso numero di posti e di studenti.

specializzando
che non vuole andare
a Crotone

≥ 43K specializzandi;
solo 31K posti

Def. L'abbinamento M è instabile se esiste un ospedale h ed uno studente s tale che:

- h e s sono accettabili uno per l'altro; e
- s è non assegnato, oppure s preferisce h all'ospedale assegnato; e
- h non ha riempito i propri posti, oppure h preferisce s ad almeno uno degli studenti a sé assegnati.

Teorema. Esiste un abbinamento stabile.

Dim. Generalizzazione diretta dell'algoritmo di Gale–Shapley.

Contesto storico

Programma di abbinamento nazionale medici residenti (NRMP).

- Ufficio centralizzato per abbinare specializzandi di medicina ad ospedali
- Iniziato nel 1952 per risolvere problematiche di date.
- Utilizzava originariamente l'algoritmo "Boston pool".
- Algoritmo rivisto nel 1998.
  - ottimo lato specializzandi
  - gestisce vari vincoli collaterali (p.e., coppie di medici sposati)

gli ospedali iniziavano a fare offerte sempre prima, con anche 2 anni di anticipo

esistenza dell'abbinamento stabile non è più garantita

The Redesign of the Matching Market for American Physicians: Some Engineering Aspects of Economic Design

By Alvin E. Roth and Elliott Peranson*

We report on the design of the new clearinghouse adopted by the National Resident Matching Program, which annually fills approximately 20,000 jobs for new physicians. Because the market has complementarities between applicants and between positions, the theory of simple matching markets does not apply directly. However, computational experiments show the theory provides good approximations. Furthermore, the set of stable matchings, and the opportunities for strategic manipulation, are surprisingly small. A new kind of "core convergence" result explains this; that each applicant interviews only a small fraction of available positions is important. We also describe engineering aspects of the design process. (JEL C78, B41, J44)

THE MATCH
NATIONAL RESIDENT MATCHING PROGRAM®

Premio Nobel per l'Economia 2012

Lloyd Shapley. Teoria degli abbinamenti stabili e algoritmo di Gale–Shapley.

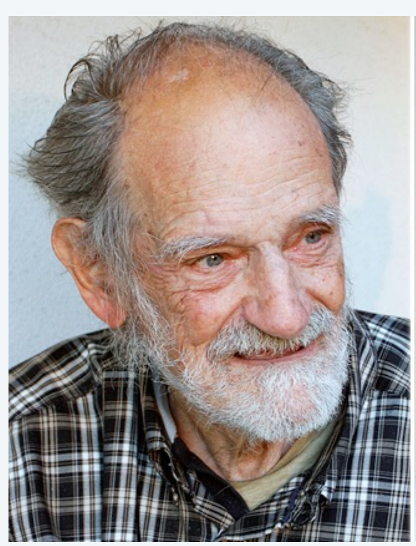
COLLEGE ADMISSIONS AND THE STABILITY OF MARRIAGE

D. GALE* AND L. S. SHAPLEY, Brown University and the RAND Corporation

1. Introduction. The problem with which we shall be concerned relates to the following typical situation: A college is considering a set of n applicants of which it can admit a quota of only q. Having evaluated their qualifications, the admissions office must decide which ones to admit. The procedure of offering admission only to the q best-qualified applicants will not generally be satisfactory, for it cannot be assumed that all who are offered admission will accept.

applicazioni originali: ammissioni universitarie e matrimoni (eterosessuali)

Alvin Roth. Ha applicato Gale–Shapley agli abbinamenti tra specializzandi ed ospedali, tra studenti e scuole, e tra donatori di organi e pazienti.



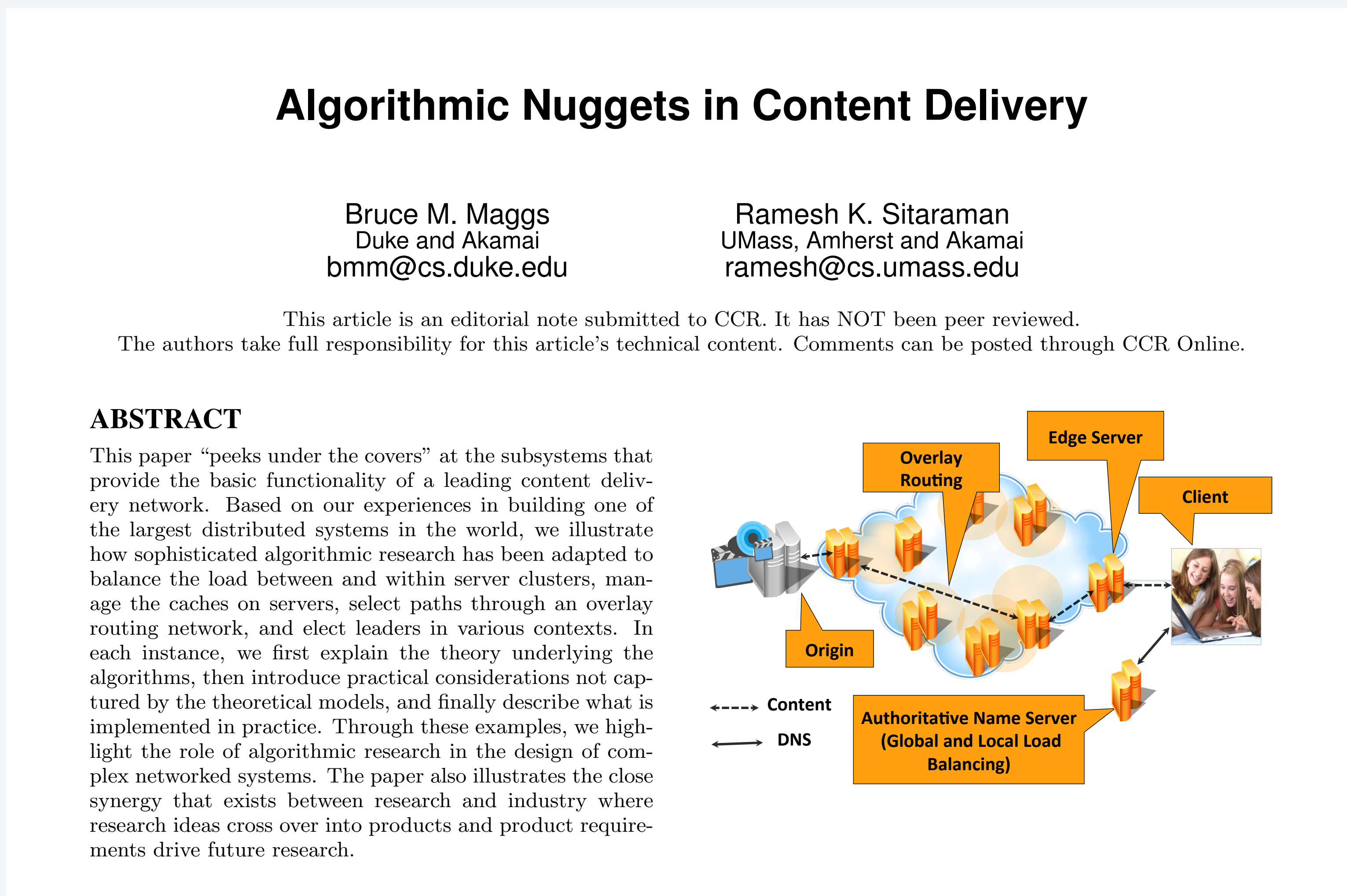
Lloyd Shapley

Alvin Roth

Un'applicazione contemporanea

Reti di distribuzione del contenuto. Distribuiscono molto del contenuto mondiale attuale sul web.

Utente. Preferenze basate su latenza e perdita dei pacchetti.
Web server. Preferenze basate su costi di banda e co-locazione.
Obiettivo. Assegnare miliardi di utenti ai server, ogni 10 secondi.



Algorithmic Nuggets in Content Delivery

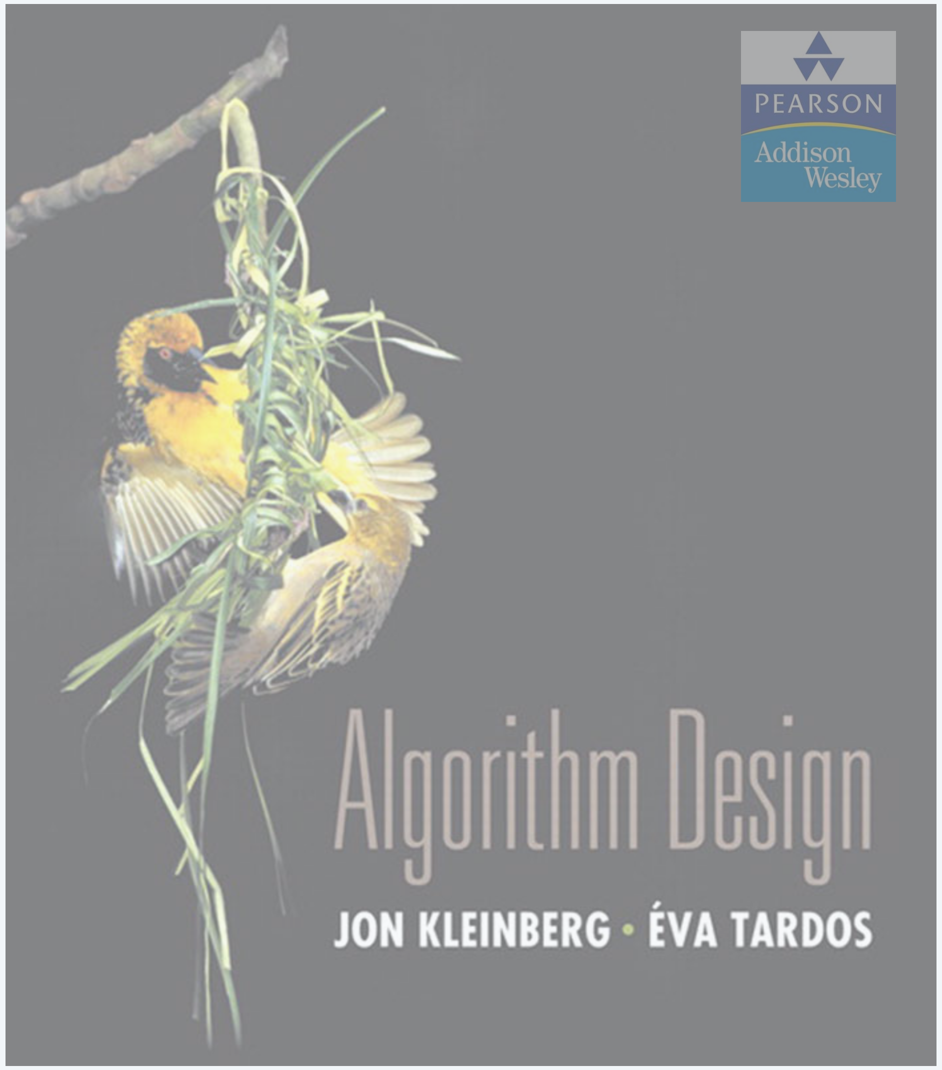
Bruce M. Maggs
Duke and Akamai
bmm@cs.duke.edu

Ramesh K. Sitaraman
UMass, Amherst and Akamai
ramesh@cs.umass.edu

This article is an editorial note submitted to CCR. It has NOT been peer reviewed.
The authors take full responsibility for this article's technical content. Comments can be posted through CCR Online.

ABSTRACT

This paper "peeks under the covers" at the subsystems that provide the basic functionality of a leading content delivery network. Based on our experiences in building one of the largest distributed systems in the world, we illustrate how sophisticated algorithmic research has been adapted to balance the load between and within server clusters, manage the caches on servers, select paths through an overlay routing network, and elect leaders in various contexts. In each instance, we first explain the theory underlying the algorithms, then introduce practical considerations not captured by the theoretical models, and finally describe what is implemented in practice. Through these examples, we highlight the role of algorithmic research in the design of complex networked systems. The paper also illustrates the close synergy that exists between research and industry where research ideas cross over into products and product requirements drive future research.



SECTION 1.2

1. PROBLEMI RAPPRESENTATIVI

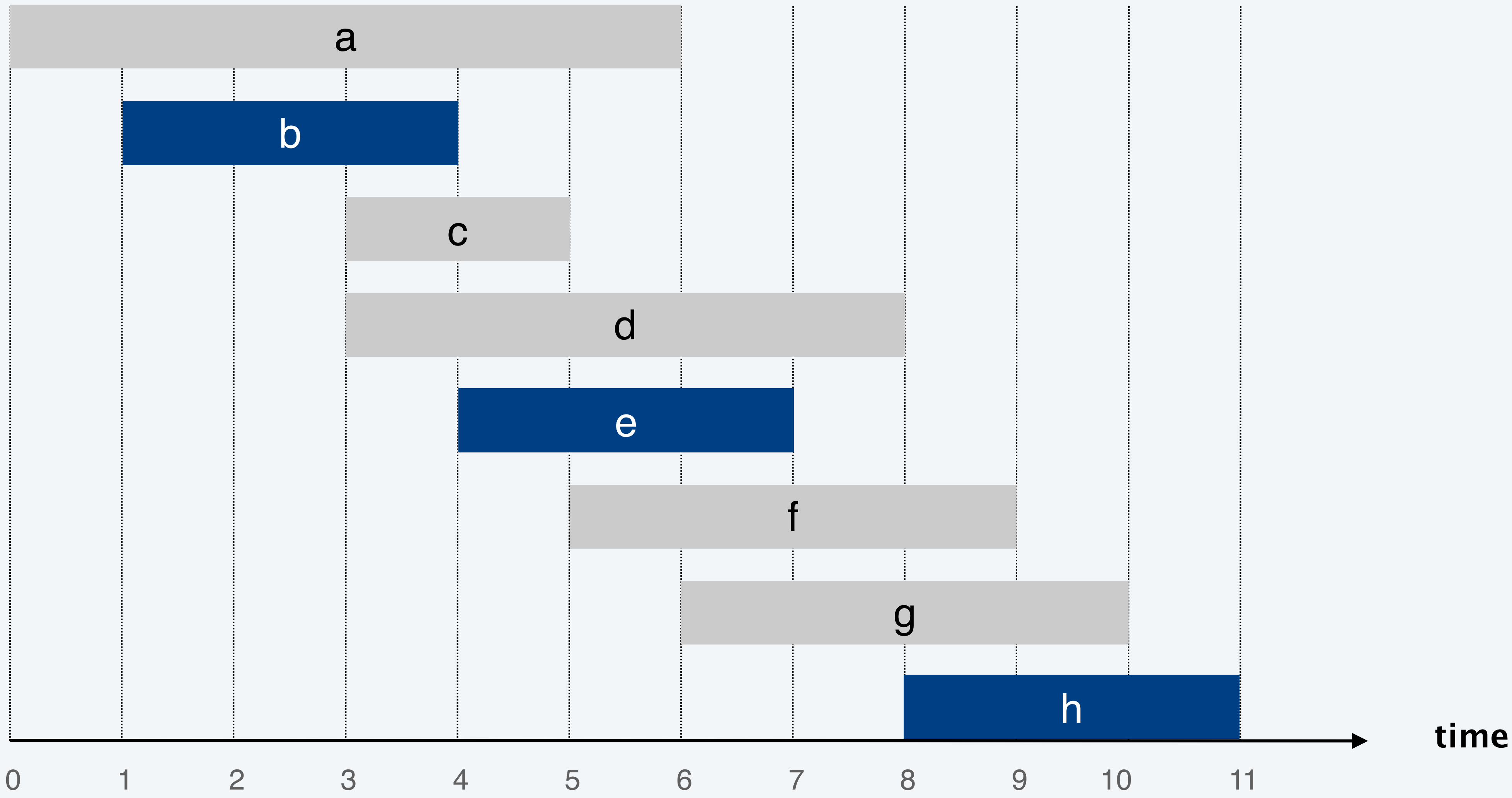
- *abbinamento stabile*
- *cinque problemi rappresentativi*

Schedulazione di intervalli

Input. Un insieme di lavori con tempi di inizio e di fine.

Scopo. Trovare un sottoinsieme a cardinalità massima di lavori mutuamente compatibili.

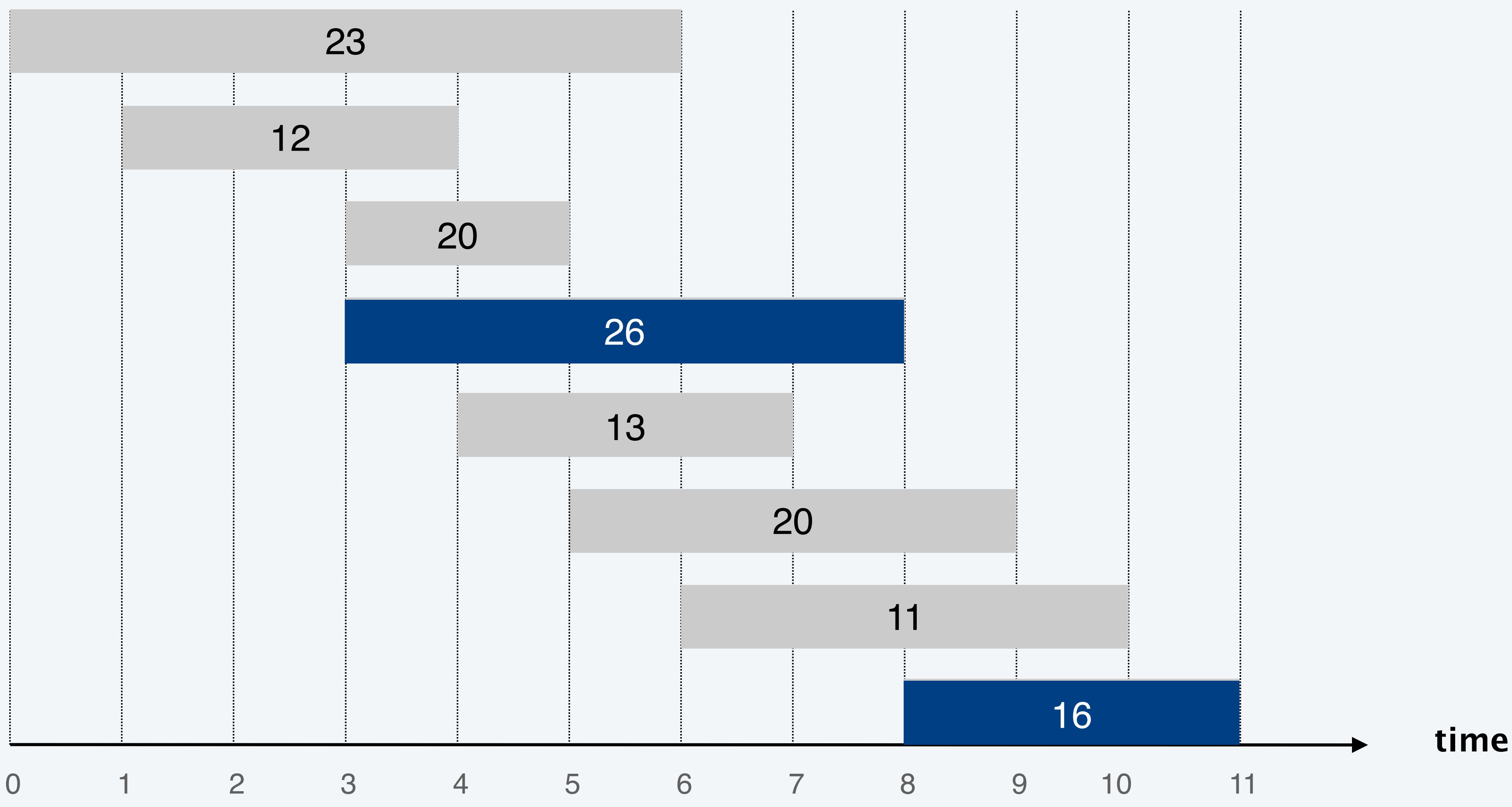
i lavori non si sovrappongono



Schedulazione di intervalli pesati

Input. Un insieme di lavori con tempi di inizio e di fine e con dei pesi.

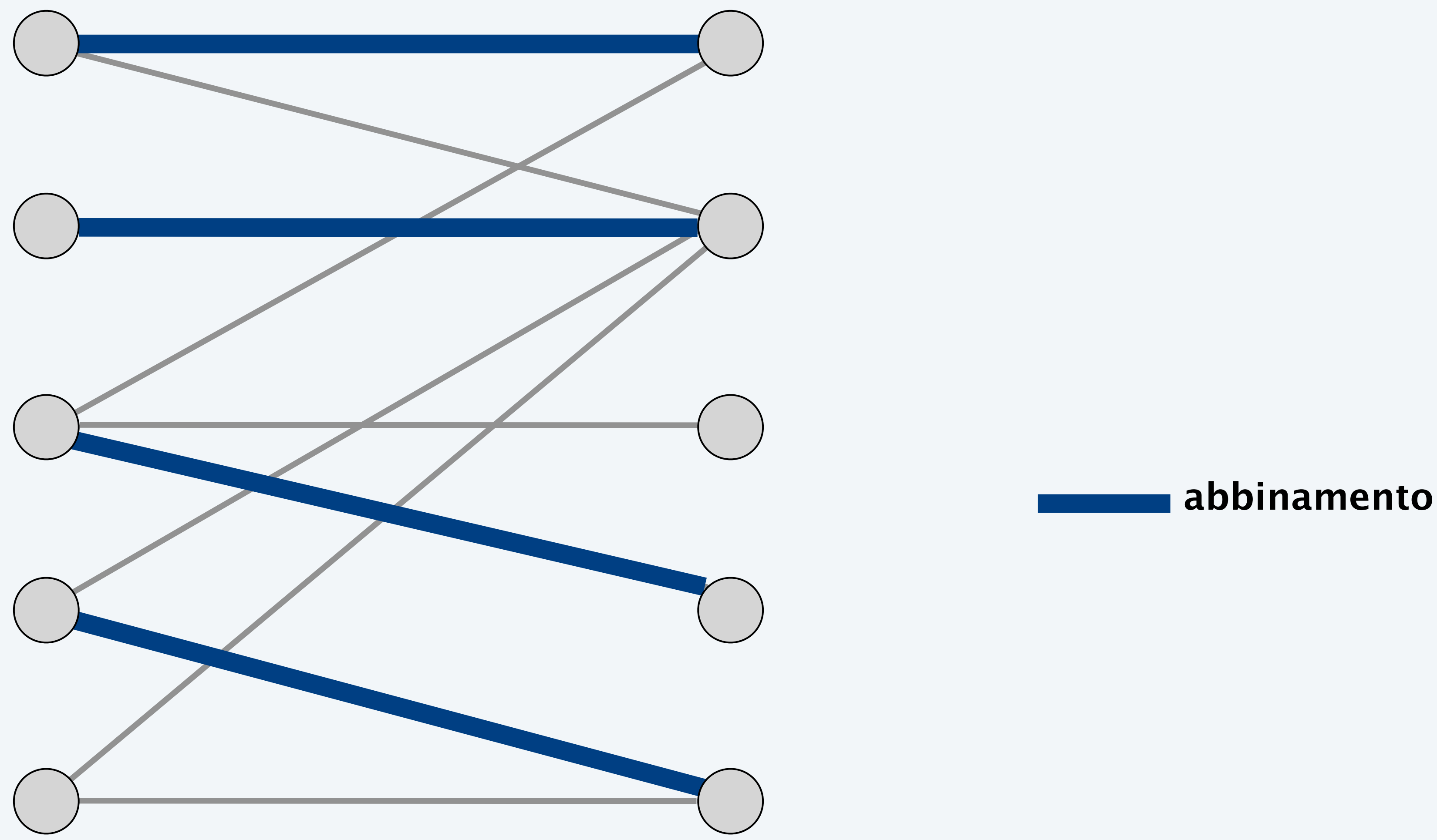
Scopo. Trovare un sottoinsieme a peso massimo di lavori mutuamente compatibili.



Abbinamento bipartito

Problema. Dato un grafo bipartito $G = (L \cup R, E)$, trovare un abbinamento a massima cardinalità.

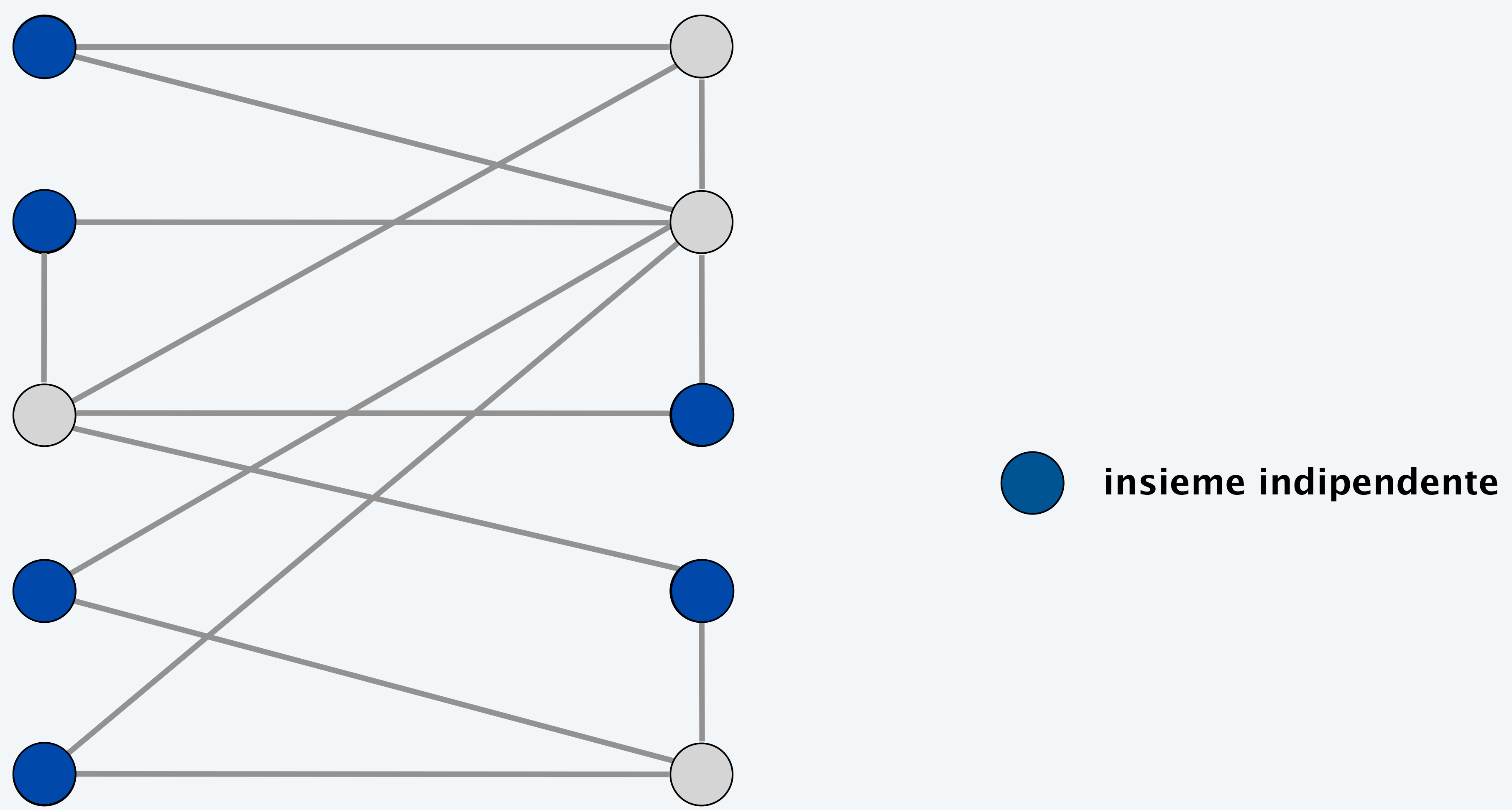
Def. Un sottoinsieme di archi $M \subseteq E$ è un abbinamento [matching] se ogni nodo appare in al più un arco di M.



Insieme indipendente

Problema. Dato un grafo $G = (V, E)$, trovare un insieme indipendente a cardinalità massima.

Def. Un sottoinsieme $S \subseteq V$ è indipendente se per ogni $(u, v) \in E$, si ha $u \notin S$ oppure $v \notin S$ (o entrambe).



Localizzazione competitiva di impianti

Input. Un grafo con un peso su ogni nodo.

Gioco. Due giocatori in competizione si alternano nel selezionare nodi.

Non si può selezionare un nodo se qualcuno dei suoi vicini è già stato selezionato.

Scopo. Selezionare un sottoinsieme di nodi a peso massimo.

Il secondo giocatore può garantirsi 20 punti ma non 25

Cinque problemi rappresentativi

Variazioni su un tema: insieme indipendente.

Schedulazione di intervalli: algoritmo avido, tempo $O(n \log n)$.

Schedulazione di intervalli pesati: programmazione dinamica, $O(n \log n)$.

Abbinamento bipartito: algoritmo basato su flussi, $O(n^k)$.

Insieme indipendente: **NP**-completo.

Localizzazione competitiva di impianti: **PSPACE**-completo.