6.1 Calcolo di $\langle w, \phi(x) \rangle$ in $\mathbb{R}^m$

$$
\begin{aligned}
\langle w, \phi(x) \rangle &= \langle \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \phi(x^{(j)}), \phi(x) \rangle \\
&= \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \langle \phi(x^{(j)}), \phi(x) \rangle \\
&= \alpha^\top \begin{pmatrix} \langle \phi(x^{(1)}), \phi(x) \rangle \\ \langle \phi(x^{(2)}), \phi(x) \rangle \\ \dots \\ \langle \phi(x^{(m)}), \phi(x) \rangle \end{pmatrix} \\
&= \alpha^\top \begin{pmatrix} K(x^{(1)}, x) \\ K(x^{(2)}, x) \\ \dots \\ K(x^{(m)}, x) \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Quando $x = x^{(i)}$ si ottiene $\langle w, \phi(x^{(i)}) \rangle = \alpha^\top \mathrm{K}_i$ dove K_i è la i-esima colonna della matrice di Mercer.

6.2 Calcolo di $\langle w, w \rangle$ in $\mathbb{R}^m$

$$
\begin{aligned}
\langle w, w \rangle &= \langle \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \phi(x^{(i)}), \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \phi(x^{(j)}) \rangle \\
&= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \alpha_i \alpha_j \langle \phi(x^{(i)}), \phi(x^{(j)}) \rangle \\
&= \sum_{i,j=1}^{m} \alpha_i \alpha_j K(x^{(i)}, x^{(j)}) \\
&= \alpha^\top \mathrm{K} \alpha
\end{aligned}
$$

dove K è la matrice di Mercer.