Esercitazione di Complementi di Matematica, a. a. 2016/17
Corso di Laurea in Ingegneria
Università degli studi Roma Tre

Foglio n° 1
FORME BILINEARI, FORME QUADRATICHE E PRODOTTI SCALARI

Esercizio 1. Stabilire quali delle seguenti sono forme bilineari su $\mathbb{R}^3$ (denotiamo con $v = (x_1, x_2, x_3)$ e $w = (y_1, y_2, y_3)$ vettori di $\mathbb{R}^3$ e con X e Y i vettori colonna delle coordinate di v e w rispettivamente):

(i) $f(v,w) = x_1y_2 - x_3y_3 + x_2$

(ii) $f(v,w) = 2x_1y_1 - x_3y_1 + 3x_3y_2 + 1$

(iii) $f(v,w) = x_1y_1 - x_1y_2 - x_1y_3 - x_2y_1 + x_3y_1$

(iv) $f(v,w) = \sum_{i=1}^{3}(x_i + y_i)^2 - \sum_{i=1}^{3} x_i^2$

(v) $f(v,w) = \det\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{pmatrix}$

(vi) $f(v,w) = {}^tXAY$ dove $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

Per ciascuna forma bilineare trovata, determinare la matrice associata rispetto alla base canonica $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ di $\mathbb{R}^3$ e stabilire se è non degenere e se è simmetrica.

Esercizio 2. Per ciascuna delle forme quadratiche $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ seguenti, determinare la forma bilineare polare associata, una base di $\mathbb{R}^3$ rispetto alla quale q si esprime in forma canonica, il rango e la segnatura:

(i) $q(v) = x_1x_2 - x_2x_3 + x_1x_3$

(ii) $q(v) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 3x_2^2$

(iii) $q(v) = 14x_1x_2 - 10x_1x_3 + 17x_2^2 - 6x_2x_3 - 5x_3^2$

(iv) $q(v) = 4x_1x_2 - x_2^2 - x_2x_3$

Esercizio 3. Per ciascuna delle forme quadratiche $q : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}$ seguenti, determinare la forma bilineare polare associata, una base di $\mathbb{C}^4$ rispetto alla quale q si esprime in forma canonica e il rango:

(i) $q(v) = 2x_1x_2 + x_2^2 - x_2x_3 + x_2x_4$

(ii) $q(v) = x_1^2 + x_1x_4 - x_2^2 + 4x_2x_3 - x_4^2$

(iii) $q(v) = 2x_1x_2 - 3x_1x_3 + 4x_1x_4 - 6x_2x_3 + 8x_2x_4 - 12x_3x_4$

(iv) $q(v) = 2x_2x_3$

Esercizio 4. Sia lo spazio vettoriale euclideo $(V = \mathbb{R}^4, \langle , \rangle)$ dove $\langle , \rangle$ è il prodotto scalare standard. Sia W lo spazio generato dai vettori

$$w_1 = (1, 1, 0, 1), \quad w_2 = (1, -1, 0, -1), \quad w_3 = (3, 1, 0, 1).$$

Determinare la dimensione di W, trovarne una base ortonormale ed estendere tale base a una base ortonormale di V.

Esercizio 5. Sia lo spazio vettoriale euclideo $(V = \mathbb{R}^4, \langle , \rangle)$ dove $\langle , \rangle$ è il prodotto scalare standard. Sia W lo spazio generato dai vettori

$$w_1 = (-1, 2, -1, 3), \quad w_2 = (2, 3, 1, 0).$$

Determinare la dimensione di W, trovarne una base ortonormale ed estendere tale base a una base ortonormale di V.

Esercizio 6. Per ciascuna delle forme quadratiche $q : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ seguenti, stabilire usando il criterio di Sylvester (o altri metodi, ma senza diagonalizzare col metodo dei vettori non isotropi) se è definita positiva, definita negativa e indefinita.

(i) $q(v) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 5x_2^2 + 2x_2x_4 - 2x_3^2 - 2x_3x_4$

(ii) $q(v) = 4x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_1x_4 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$

(iii) $q(v) = x_1^2 - 4x_1x_2 + 6x_2^2 - 2x_2x_3 + x_3^2 + x_4^2$

(iv) $q(v) = x_1^2 - 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 2x_2x_4 + 9x_3^2 + 7x_4^2$

(v) $q(v) = -4x_1^2 + 6x_1x_2 - 4x_1x_3 + 2x_1x_4 - 3x_2^2 + 4x_2x_3 - 2x_2x_4 - 2x_3^2 + 2x_3x_4 - x_4^2$

(vi) $q(v) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 7x_2^2 + 10x_2x_4 + x_3^2 + 8x_4^2$

Le forme quadratiche definite positive inducono un prodotto scalare $\langle , \rangle$ su $\mathbb{R}^4$. Per queste ultime determinare una base ortonormale di $\mathbb{R}^4$ usando il procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt.

Esercizio 7. (più difficile) Sia $V = \mathbb{R}^3$ e sia, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, la forma quadratica $q : V \to \mathbb{R}$ definita da

$$q(v) = (k+1)x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + 2kx_2x_3 + 2x_3^2$$

dove $v = (x_1, x_2, x_3)$.

(i) Determinare la forma bilineare polare $f : V \times V \to \mathbb{R}$ associata a q.

(ii) Determinare per quali $k \in \mathbb{R}$ le rette vettoriali W_1, W_2 di equazioni

$$W_1 : \begin{cases} 2x_1 - x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad W_2 : \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_2 + 6x_3 = 0 \end{cases}$$

sono ortogonali rispetto a f.

(iii) Determinare per quali $k \in \mathbb{R}$ la forma bilineare f è un prodotto scalare.

(iv) (**più difficile**) Determinare la segnatura di q al variare di $k \in \mathbb{R}$.