Esercitazione di Complementi di Matematica, a. a. 2016/17
Corso di Laurea in Ingegneria
Università degli studi Roma Tre

Foglio n° 2
OPERATORI SIMMETRICI E TEOREMA SPETTRALE

Esercizio 1. Siano gli operatori lineari $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ così definiti:

(1) $F((x_1, x_2)) = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$;

(2) $F((x_1, x_2)) = \begin{pmatrix} 4 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$;

(3) $F((x_1, x_2)) = \begin{pmatrix} 1 & -11 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$;

(4) $F((x_1, x_2)) = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$;

(5) $F((x_1, x_2)) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

(i) Determinare quali di essi sono operatori simmetrici rispetto al prodotto scalare standard $\langle , \rangle$.
(ii) Per ciascun operatore simmetrico, trovare una base ortonormale che lo diagonalizza.

Esercizio 2. Sia l'applicazione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ così definita:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (-5x_1 + 2x_2 - 4x_3, 2x_1 - 8x_2 - 2x_3, -4x_1 - 2x_2 - 5x_3).$$

(i) Determinare la matrice A_f associata ad f rispetto alla base canonica.
(ii) Verificare che f è un operatore simmetrico.
(iii) Determinare una base ortonormale di autovettori per f.

Esercizio 3. Sia l'applicazione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ così definita:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + x_2, x_1 + x_2 - x_3, -x_2 + 2x_3).$$

(i) Determinare la matrice A_f associata ad f rispetto alla base canonica.
(ii) Verificare che f è un operatore simmetrico.
(iii) Determinare una base ortonormale di autovettori per f.

Esercizio 4. Sia l'applicazione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ così definita:

$$f(v) = \langle v, e_1 - e_2 + 2e_3 \rangle (e_1 - e_2 + 2e_3)$$

dove $v = (x_1, x_2, x_3)$.

(i) Determinare la matrice A_f associata ad f rispetto alla base canonica.
(ii) Verificare che f è un operatore simmetrico.
(iii) Determinare una base ortonormale di autovettori per f.

Esercizio 5. Sia lo spazio vettoriale euclideo $(\mathbb{R}^3, \langle , \rangle)$, dove $\langle , \rangle$ è il prodotto scalare standard. Siano date le seguenti forme quadratiche $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$:

(1) $q(v) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 - 2x_2x_3 + x_3^2$;
(2) $q(v) = 2x_1^2 + 3x_2^2 - 2x_2x_3 + 3x_3^2$
(3) $q(v) = -3x_1^2 + 2\sqrt{2}\, x_1x_3 + x_2^2 - 2x_3^2$;
(4) $q(v) = x_1^2 + 4x_1x_3 + 6x_2x_3 + x_3^2$.

dove $v = (x_1, x_2, x_3)$. Per ciascuna di esse trovare una base ortonormale che la diagonalizza, scrivere la corrispondente forma diagonale e determinare la segnatura. (Attenzione a non fare confusione con l'espressione canonica data dal teorema di Sylvester.)