Esercitazione di Complementi di Matematica, a. a. 2016/17
Corso di Laurea in Ingegneria
Università degli studi Roma Tre

Foglio n° 3
GEOMETRIA NEL PIANO E NELLO SPAZIO

Esercizio 1. Sia il piano affine $\mathbb{A}^2$ con riferimento $\mathrm{RA}(O; i, j)$. Si considerino i punti $P_1(0,0)$, $P_2(1,0)$, $P_3(\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$, $P_4(0,1)$. Dette r_1, r_2, r_3, r_4 rispettivamente le rette passanti per P_1 e P_2, per P_2 e P_3, per P_3 e P_4, per P_4 e P_1

(i) determinare il punto P_5 dato dall'intersezione di r_1 e r_3 e il punto P_6 dato dall'intersezione di r_2 e r_4;
(ii) verificare che i punti medi A, B, C rispettivamente dei segmenti P_5P_6, P_2P_4 e P_1P_3 sono allineati.

Esercizio 2. Sia il piano affine $\mathbb{A}^2$ con riferimento $\mathrm{RA}(O; i, j)$. Assegnato il triangolo di vertici $P_1(1,0)$, $P_2(1,1)$, $P_3(0,1)$, scrivere le equazioni cartesiane delle mediane r_1, r_2, r_3 uscenti rispettivamente da P_1, P_2, P_3. Verificare che tali mediane si incontrano in un punto e determinare le coordinate di tale punto.

Esercizio 3. Sia lo spazio affine $\mathbb{A}^3$ con riferimento $\mathrm{RA}(O; i, j, k)$. Scrivere le equazioni parametriche e cartesiane delle rette passanti per il punto indicato e parallele alla direzione indicata:

(1) $P(1,-5,2)$, $v = (0,3,-4)$;
(2) $P(-1,2-3)$, $v = (1,0,2)$;
(3) $P(2,-1,0)$, $v = (-4,5,0)$;
(4) $P(4,-2,1)$, $v = (2,-1,3)$.

Esercizio 4. Sia lo spazio affine $\mathbb{A}^3$ con riferimento $\mathrm{RA}(O; i, j, k)$. Per ciascuna delle seguenti triple di punti:

(1) $P(0,0,0)$, $Q(3,2-3)$, $R(-2,5,4)$;
(2) $P(1,2,1)$, $Q(1,-1,-2)$, $R(\frac{1}{2},1,1)$;
(3) $P(3,0,0)$, $Q(0,-6,0)$, $R(0,0,2)$;
(4) $P(1,0,0)$, $Q(0,1,2)$, $R(2,-1,-2)$;

(i) verificare che i tre punti non sono allineati;
(ii) scrivere le equazioni parametriche e cartesiane del piano π contenente i tre punti;
(iii) determinare le equazioni del piano parallelo a π passante per $A(1,-1,1)$.

Esercizio 5. Sia lo spazio affine $\mathbb{A}^3$ con riferimento $\mathrm{RA}(O; i, j, k)$. Verificare che i piani

$$\alpha : x - 2y + 3z - 1 = 0 \quad \text{e} \quad \beta : \begin{cases} x = t + 5s \\ y = -t + s \\ z = -t - s + 1 \end{cases}$$

sono paralleli.

Esercizio 6. Sia lo spazio affine $\mathbb{A}^3$ con riferimento $\mathrm{RA}(O; i, j, k)$.

(i) Verificare che le rette

$$r : \begin{cases} x - y + 5z - 1 = 0 \\ x + 2y - z + 3 = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad s : \begin{cases} x = 3t \\ y = 1 - 2t \\ z = -1 - t \end{cases}$$

sono parallele.
(ii) Determinare le equazioni del piano che contiene r e s.

Esercizio 7. Sia lo spazio affine $\mathbb{A}^3$ con riferimento $\mathrm{RA}(O; i, j, k)$.

(i) Verificare che le rette

$$r : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 + t \\ z = 1 - 2t \end{cases} \qquad \text{e} \quad r' : \begin{cases} 2x + y - 3z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

sono sghembe.

(ii) Determinare la retta s avente direzione $v = (1, -1, -2)$ incidente sia r che r'.

(iii) Determinare il piano contenente r e parallelo a r'.

Esercizio 8. Sia lo spazio affine $\mathbb{A}^3$ con riferimento $\mathrm{RA}(O; i, j, k)$.

(i) Determinare il piano π passante per il punto $P_0(1, 2, -2)$ e contenente la retta

$$r : \begin{cases} 3x - 2y + z + 4 = 0 \\ 2x - y + z + 3 = 0 \end{cases} .$$

(ii) Verificare che la retta

$$r' : \begin{cases} x - z - 3 = 0 \\ y - z - 4 = 0 \end{cases}$$

passa per il punto P_0, è contenuta nel piano π e non è parallela alla retta r. Dedurne che r e r' sono incidenti.

Esercizio 9. Sia lo spazio affine $\mathbb{A}^3$ con riferimento $\mathrm{RA}(O; i, j, k)$.

(i) Verificare che le rette

$$r : \begin{cases} 2x - y - z - 3 = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases} \qquad \text{e} \quad r' : \begin{cases} x + 3y + z = 0 \\ x + y - z - 2 = 0 \end{cases}$$

sono incidenti.

(ii) Determinare il punto P di intersezione di r e r'.

(iii) Determinare il piano π contenente sia r che r'.

Esercizio 10. Sia lo spazio affine $\mathbb{A}^3$ con riferimento $\mathrm{RA}(O; i, j, k)$.

(i) Verificare che le rette

$$r : \begin{cases} x - 2z + 1 = 0 \\ y + z - 1 = 0 \end{cases} \qquad \text{e} \quad r' : \begin{cases} x - z - 1 = 0 \\ y - 2z - 1 = 0 \end{cases}$$

sono sghembe.

(ii) Determinare la retta s passante per l'origine O ed incidente sia r che r'.

(iii) Determinare il piano contenente r e parallelo a r'.