

Esercitazione di Complementi di Matematica, a. a. 2016/17
Corso di Laurea in Ingegneria
Università degli studi Roma Tre

Foglio n° 4
GEOMETRIA PROIETTIVA

Esercizio 1. Sia lo piano proiettivo $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ con coordinate omogenee (X_0, X_1, X_2) . Per ciascuna delle seguenti coppie di punti:

- (1) $P = [1, -5, 2], Q = [0, 3, -4]$;
- (2) $P = [-1, 2 - 3], Q = [1, 0, 2]$;
- (3) $P = [2, -1, 0], Q = [-4, 5, 0]$;
- (4) $P = [4, -2, 1], Q = [2, -1, 3]$.

scrivere le equazioni cartesiane della retta passante per i due punti.

Esercizio 2. Sia il piano proiettivo $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ con coordinate omogenee (X_0, X_1, X_2) . Verificare che i punti $P = [1, 2, 2], Q = [3, 1, 4], R = [2, -1, 2]$ sono allineati e determinare l'equazione cartesiana della retta che li contiene.

Esercizio 3. Sia il piano proiettivo $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ con coordinate omogenee (X_0, X_1, X_2) . Siano assegnati i punti $P_1 = [1, 2, 3], P_2 = [1, 1, -1], Q_1 = [-1, 2, 1], Q_2 = [1, -1, -1]$ e si considerino le rette r e s , la prima passante per P_1 e P_2 , la seconda passante per Q_1 e Q_2 .

- (i) Determinare le equazioni cartesiane in coordinate omogenee delle rette r e s .
- (ii) Determinare il punto $R = r \cap s$.

Esercizio 4. Sia il piano affine \mathbb{A}^2 con riferimento $RA(O; i, j)$. Determinare il punto improprio (rispetto a X_0) di ciascuna delle seguenti rette:

- (1) $2x + 3y + 1 = 0$;
- (2) $x + 2 = 0$;
- (3) $-x + 4y - 5 = 0$;
- (4) $y - 4 = 0$;
- (5) $x + y + 1 = 0$.

Esercizio 5. Sia lo spazio proiettivo $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ con coordinate omogenee (X_0, X_1, X_2, X_3) . Per ciascuna delle seguenti triple di punti:

- (1) $P = [2, -1, 1, 0], Q = [1, 3, -4, 1], R = [3, 2, -3, 0]$;
- (2) $P = [1, -3, 0, 1], Q = [-3, 2, -1, 0], R = [1, 4, 1, -1]$;
- (3) $P = [1, 1, 1, 1], Q = [1, 2, 1, 2], R = [2, 6, 2, 6]$;

- (i) stabilire se i tre punti sono allineati o meno;
- (ii) in caso non siano allineati, scrivere le equazioni cartesiane del piano π contenente i tre punti.

Esercizio 6. Sia lo spazio proiettivo $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ con coordinate omogenee (X_0, X_1, X_2, X_3) . Per ciascuna delle seguenti coppie di rette:

(1)

$$r : \begin{cases} X_0 - X_1 + X_2 = 0 \\ X_0 + X_2 - 3X_3 = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad s : \begin{cases} X_1 - 2X_2 + X_3 = 0 \\ X_0 - 2X_2 - 2X_3 = 0 \end{cases} ;$$

(2)

$$r : \begin{cases} X_0 - X_1 + X_2 - X_3 = 0 \\ 2X_0 - 3X_2 = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad s : \begin{cases} X_0 + X_1 = 0 \\ 2X_0 - 2X_1 - 2X_2 - X_3 = 0 \end{cases} ;$$

(3)

$$r : \begin{cases} X_0 + X_2 = 0 \\ X_0 - X_1 - X_3 = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad s : \begin{cases} 2X_0 - X_1 + X_3 = 0 \\ X_0 - X_1 + X_2 - X_3 = 0 \end{cases} ;$$

verificare se sono sghembe oppure incidenti.

Esercizio 7. Sia lo spazio affine \mathbb{A}^3 con riferimento $\text{RA}(O; i, j, k)$. Determinare le equazioni della retta impropria (rispetto a X_0) di ciascuno dei seguenti piani:

- (1) $x - 4y + z = 0$;
- (2) $y - 2z + 1 = 0$;
- (3) $2x + 3y + 4z - 1 = 0$;
- (4) $z + 5 = 0$;
- (5) $x + y + 1 = 0$.