

Deformazioni di algebre di Lie semplici ristrette

Filippo Viviani

20 marzo 2008

1. – Algebre di Lie semplici ristrette

Le algebre di Lie semplici su un campo algebricamente chiuso di *caratteristica zero* sono state classificate agli inizi del XIX secolo da Killing e Cartan. La classificazione procede nel modo seguente: per prima cosa si dimostra che la forma di Killing è non degenere e, usando ciò, si stabilisce una corrispondenza biunivoca tra le algebre di Lie semplici e i sistemi di radici irriducibili; successivamente i sistemi di radici irriducibili sono classificati in funzione dei diagrammi di Dynkin a loro associati. La classificazione finale è la seguente: esistono 4 famiglie infinite di algebre di Lie semplici, e cioè l'algebra lineare speciale $\mathfrak{sl}(n+1)$, l'algebra ortogonale speciale di rango dispari $\mathfrak{so}(2n+1)$, l'algebra simplettica $\mathfrak{sp}(2n)$ e l'algebra speciale ortogonale di rango pari $\mathfrak{so}(2n)$, e 5 algebre di Lie eccezionali corrispondenti ai diagrammi di Dynkin eccezionali E_6, E_7, E_8, F_4 e G_2 .

Le algebre semplici in caratteristica zero possono essere definite sugli interi (via basi di Chevalley) e poi ridotte modulo un primo p . Le algebre di Lie modulari (cioè definite sopra un campo di caratteristica positiva) semplici che si ottengono in questo modo sono chiamate algebre di Lie modulari *di tipo classico*. Queste algebre di Lie modulari semplici hanno una forma di Killing degenere nei primi p che dividono il discriminante della forma di Killing intera.

Il primo esempio di algebra di Lie modulare non di tipo classico è dovuto a Witt, che nel 1937 scoprì che l'algebra delle derivazioni $W(1) := \text{Der}_F F[X]/(X^p)$ su un campo F di caratteristica $p \neq 2$ è semplice con forma di Killing sempre degenere. Nei successivi tre decenni, molte algebre di Lie modulari semplici non di tipo classico furono scoperte, fino a quando nel 1966 Kostrikin-Shafarevich ([3]) unificarono gli esempi fino ad allora noti costruendo certe algebre di Lie modulari semplici che sono gli analoghi, in dimensione finita e in caratteristica positiva, delle algebre di Lie complesse semplici di dimensione infinita, che occorrono nella classificazione di Cartan degli pseudogruppi di Lie.

Queste algebre di Lie semplici, dette di *tipo Cartan*, sono divise in quattro famiglie chiamate algebre di Witt-Jacobson, algebre Speciali, algebre Hamiltoniane e algebre di Contatto. Le algebre di Witt-Jacobson $W(n)$ sono algebre di derivazione delle algebre polinomiali p -troncate in n variabili, e cioè

$$W(n) = \text{Der}_F F[x_1, \dots, x_n]/(x_1^p, \dots, x_n^p).$$

Per definire le rimanenti tre famiglie, consideriamo l'azione naturale di $W(n)$ sull'algebra esterna delle forme differenziali in dx_1, \dots, dx_n a coefficienti in $A(n) := F[x_1, \dots, x_n]/(x_1^p, \dots, x_n^p)$. Consideriamo le seguenti tre forme differenziali, chiamate forma di volume, forma hamiltoniana e forma di contatto:

$$\begin{cases} \omega_S = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n, \\ \omega_H = \sum_{i=1}^m dx_i \wedge dx_{i+m} \text{ se } n = 2m, \\ \omega_K = dx_{2m+1} + \sum_{i=1}^m (x_{i+m} dx_i - x_i dx_{i+m}) \text{ se } n = 2m + 1. \end{cases}$$

L'algebra Speciale $S(n)$ ($n \geq 3$), l'algebra Hamiltoniana $H(n)$ ($n = 2m \geq 2$) e l'algebra di Contatto $K(n)$ ($n = 2m + 1 \geq 3$) sono definite come le algebre derivate del secondo ordine delle seguenti tre sottoalgebre di $W(n)$:

$$\begin{cases} \tilde{S}(n) = \{D \in W(n) \mid D\omega_S = 0\}, \\ \tilde{H}(n) = \{D \in W(n) \mid D\omega_H = 0\}, \\ \tilde{K}(n) = \{D \in W(n) \mid D\omega_K \in A(n)\omega_K\}. \end{cases}$$

Tutte le algebre di Lie modulari semplici descritte sopra appartengono ad una classe di algebre di Lie modulari chiamate *ristrette* (o p -algebre). Queste algebre di Lie sono munite di una mappa $x \mapsto x^{[p]}$ che possiede proprietà analoghe alla mappa che manda una derivazione nella sua potenza p -esima. In particolare, questa mappa verifica la fondamentale proprietà

$$\text{ad}(x)^p = \text{ad}(x^{[p]}).$$

Viceversa, se un'algebra di Lie modulare L è tale che $\text{ad}(x)^p$ è ancora una derivazione interna per ogni elemento $x \in L$, allora L può essere dotata di una struttura di algebra di Lie ristretta, che per di più è unica se L ha centro banale. Molte delle algebre che si incontrano naturalmente sono ristrette, per esempio: l'algebra di derivazione di un'algebra associativa, le algebre di Lie corrispondenti a sottoestensioni di un'estensione di campi puramente inseparabile di esponente uno, gli elementi primitivi di un'algebra di Hopf cocommutativa irriducibile e le algebre di Lie associati a schemi in gruppi.

Kostrikin e Shafarevich (nel sopra citato articolo [3]) congetturarono che tutte le algebre semplici ristrette sono di tipo classico o tipo Cartan su un campo algebricamente chiuso di caratteristica $p > 5$. La *congettura di Kostrikin-Shafarevich* è stata dimostrata nel 1988 da Block-Wilson (in [1]) per $p > 7$. Più recentemente, Premet e Strade ([4]) hanno completato la congettura nel caso $p = 7$ e, inoltre, hanno dimostrato che per $p = 5$ oltre alle sopra descritte algebre di Lie c'è un'unica algebra semplice ristretta eccezionale, chiamata algebra di Melikian. In caratteristica $p = 2, 3$, ci sono molte algebre di Lie ristrette semplici (si veda per esempio [6, page 209]) e la classificazione sembra ancora lontana.

2. – Deformazioni di algebre di Lie

Lo scopo della mia tesi è stato quello di calcolare le *deformazioni infinitesimali* delle algebre di Lie semplici ristrette.

Per definizione, una deformazione infinitesimale di un'algebra di Lie \mathfrak{g} su un campo F è un'algebra di Lie \mathfrak{g}' su $F[\epsilon]/(\epsilon^2)$ tale che $\mathfrak{g}' \times_{F[\epsilon]/(\epsilon^2)} F \cong \mathfrak{g}$. Esplicitamente, \mathfrak{g}' è uguale come spazio vettoriale a $\mathfrak{g} + \epsilon\mathfrak{g}$ e il bracket di Lie $[-, -]'$ di \mathfrak{g}' verifica la seguente proprietà (per ogni $X, Y \in \mathfrak{g} \subset \mathfrak{g}'$):

$$[X, Y]' = [X, Y] + \epsilon f(X, Y),$$

dove $[-, -]$ è il bracket di Lie di \mathfrak{g} e $f(-, -)$ è una funzione 2-alternante da \mathfrak{g} a \mathfrak{g} , considerato come modulo su se stesso tramite la rappresentazione aggiunta. L'identità di Jacobi per $[-, -]'$ si traduce nel fatto che f è un cociclo e inoltre si verifica facilmente che due cocicli che differiscono per un cobordo definiscono algebre di Lie isomorfe. Pertanto le deformazioni infinitesimali di un'algebra di Lie \mathfrak{g} sono parametrizzate dal secondo gruppo di coomologia $H^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$ di \mathfrak{g} a valori nella rappresentazione aggiunta.

È un classico risultato di Whitehead che un'algebra di Lie semplice sopra un campo di caratteristica zero è rigida, cioè non ammette deformazioni infinitesimali. Rudakov ([5]) ha dimostrato che le algebre ristrette semplici di tipo classico sono rigide in caratteristica $p \geq 5$, mentre Chebochko-Kuznetsov ([2]) hanno mostrato che ci sono deformazioni non banali se $p = 2, 3$.

Nella mia tesi, ho calcolato le deformazioni infinitesimali delle algebre di Lie ristrette semplici di tipo Cartan e dell'algebra di Melikian, mostrando che esse non sono mai rigide. In particolare ho calcolato la dimensione del secondo gruppo di coomologia a valori nella rappresentazione aggiunta fornendo anche generatori espliciti. I risultati ottenuti riguardo alla dimensione sono i seguenti:

TEOREMA 1 *Sia $n \geq 1$ e assumiamo che $p = \text{char}(F) \neq 2$. Allora si ha che*

$$\dim_F H^2(W(n), W(n)) = n,$$

con l'eccezione del caso $n = 1$ e $p = 3$ quando la dimensione è 0.

TEOREMA 2 *Sia $n \geq 3$ e assumiamo che $p = \text{char}(F) \neq 2$ e inoltre che $p \neq 3$ se $n = 3$. Allora si ha che*

$$\dim_F H^2(S(n), S(n)) = n + 1.$$

TEOREMA 3 *Sia $n = 2m + 1 \geq 3$ e assumiamo che $p = \text{char}(F) \neq 2, 3$. Allora si ha che*

$$\dim_F H^2(K(n), K(n)) = n.$$

TEOREMA 4 *Sia $n = 2m \geq 2$ e assumiamo che $p = \text{char}(F) \neq 2, 3$. Allora si ha che*

$$\dim_F H^2(H(n), H(n)) = \begin{cases} n + 1 + \binom{n}{2} & \text{se } n \geq 4, \\ 3 & \text{se } n = 2. \end{cases}$$

TEOREMA 5 Sia $p = \text{char}(F) = 5$ e M l'algebra di Melikian. Allora si ha che

$$\dim_F H^2(M, M) = 5.$$

Riferimenti bibliografici

- [1] BLOCK R. E., WILSON R. L., *Classification of the restricted simple Lie algebras. J. Algebra* **114** ((1988)), 115–259.
- [2] CHEBOCHKO N. G., KUZNETSOV M. I., *Deformations of classical Lie algebras. Sb. Math.* **191** ((2000)), 1171–1190
- [3] KOSTRIKIN A. I., SHAFAREVICH I. R., *Cartan's pseudogroups and the p -algebras of lie. Soviet Math. Dokl.* **7** ((1966)), 715–718.
- [4] PREMÉT A., STRADE H., *Simple Lie algebras of small characteristic. IV. Solvable and classical roots. J. Algebra* **278** ((2004)), 766–833.
- [5] RUDAKOV A. N., *Deformations of simple Lie algebras (russian). Izv. Akad. Nauk SSR Ser. Mat.* **35** ((1971)), 1113–1119.
- [6] STRADE H., *Simple Lie algebras over fields of positive characteristic I: Structure Theory. De Gruyter Expositions in Mathematics* **38**, (2004).

Dipartimento di Matematica,

Università di Roma Tor Vergata, via della Ricerca Scientifica 1, 00133 ROMA.

e-mail: viviani@math.hu-berlin.de

Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Università di Roma Tor Vergata)

Ciclo XVII

Direttore di ricerca: Prof. R. Schoof, Università di Roma Tor Vergata.