

Nome candidato:
Numero di matricola:

APPELLO A DEL CORSO AC310 (A.A. 2014/2015)

Tutte le risposte vanno argomentate chiaramente e sinteticamente.

ESERCIZIO 1 (4 punti)

Consideriamo la funzione meromorfa $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$ su $\mathbb{C}$. Trovare lo sviluppo in serie di Laurent di f nelle seguenti regioni:

- (a) $R_1 := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$;
- (b) $R_2 := \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$;
- (c) $R_3 := \{z \in \mathbb{C} : 2 < |z|\}$.

ESERCIZIO 2 (6 punti)

Calcolare l'integrale definito $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^4 + 1} dx$.

[Suggerimento: calcolare l'integrale della funzione olomorfa $f(z) = \frac{1}{z^4 + 1}$ lungo la curva chiusa che consiste nel segmento $[-R, +R]$ e nella semicirconferenza superiore di centro 0 e raggio R e poi prendere il limite $R \rightarrow +\infty$]

ESERCIZIO 3 (8 punti) Sia U un aperto connesso contenuto in $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Dimostrare che esiste un logaritmo $\log$ su U (cioè esiste una funzione olomorfa $\log : U \rightarrow \mathbb{C}$ tale che $e^{\log(z)} = z$) se e solo se U è semplicemente connesso.

ESERCIZIO 4 (8 punti)

- (i) (2 punti) Enunciare il teorema di Rouché.
- (ii) (6 punti) Dimostrare il teorema fondamentale dell'algebra usando il teorema di Rouché.
[Suggerimento: per un polinomio $P(z) = a_n z^n + \dots + a_0 \in \mathbb{C}[z]$ di grado n , confrontare le radici di $P(z)$ con quelle di $a_n z^n$].

ESERCIZIO 5 (teorico) (8 punti)

- (i) (4 punti) Calcolare il gruppo degli automorfismi di $\mathbb{C}$ (con dimostrazione).
- (ii) (4 punti) Calcolare il gruppo degli automorfismi di $\mathbb{D}$, dove $\mathbb{D}$ è il disco unitario di $\mathbb{C}$ (con dimostrazione).