Nome candidato:
Numero di matricola:

APPELLO B DEL CORSO AC310 (A.A. 2014/2015)

Tutte le risposte vanno argomentate chiaramente.

ESERCIZIO 1 (6 punti)
Dimostrare che la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(z+n)^2}$$

definisce una funzione meromorfa su $\mathbb{C}$ e determinare i suoi poli e i loro rispettivi ordini.

ESERCIZIO 2 (6 punti)
Calcolare l'integrale (per ogni $n \geq 2$)

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^n} dx.$$

[Suggerimento: Calcolare l'integrale della funzione $f(z) = \frac{1}{1+z^n}$ lungo la curva chiusa γ_R formata dal segmento da 0 a R, dall'arco di circonferenza da R a $Re^{2\pi i/n}$ e dal segmento da $Re^{2\pi i/n}$ a 0, per $R \to +\infty$.]

ESERCIZIO 3 (teorico) (8 punti)
Enunciare e dimostrare il teorema dei residui (usando il teorema dei Cauchy sull'invarianza omologica).

ESERCIZIO 4 (8 punti)
Sia $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa non costante. Dimostrare che l'immagine di f è densa in $\mathbb{C}$.
[Suggerimento: Considerare lo sviluppo in serie di potenze di f in 0 e studiare la singolarità della funzione $g(z) := f(1/z)$ in 0.]

ESERCIZIO 5 (8 punti)
(i) (2 punti) Enunciare il principio dell'argomento.
(ii) (6 punti) Dimostrare il teorema fondamentale dell'algebra usando il principio dell'argomento.
[Suggerimento: Sia C_R la circonferenza di raggio R centrata in 0 e sia $P(z) \in \mathbb{C}[z]$ un polinomio di grado n. Confrontare $\frac{1}{2\pi i}\int_{C_R} \frac{P'(z)}{P(z)} dz$ e $\frac{1}{2\pi i}\int_{C_R} \frac{n}{z} dz$ per $R \to +\infty$.]