Nome candidato:
Numero di matricola:

APPELLO C DEL CORSO AC310 (A.A. 2014/2015)

Tutte le risposte vanno argomentate chiaramente e sinteticamente.

ESERCIZIO 1 (4 punti) Trovare lo sviluppo in serie di potenze della funzione $f(z) := \dfrac{1}{1+z^2}$ nel punto $z = 1$ e discutere il raggio di convergenza di questa serie.

ESERCIZIO 2 (4 punti) Calcolare l'integrale della funzione $f(z) = \dfrac{z^2}{(z+1)(z-1)^2}$ lungo la circonferenza di raggio 1 e centro 1.

ESERCIZIO 3 (3 punti per ogni dimostrazione) Esporre le dimostrazioni che conosci del teorema fondamentale dell'algebra usando l'analisi complessa.

[Suggerimento: Si può usare, ad esempio, il principio del massimo modulo, il teorema di Liouville, il teorema di Rochè, il principio dell'argomento, etc...]

ESERCIZIO 4 (8 punti)

(i) Dare l'esempio di una funzione meromorfa su $\mathbb{C}$ ma non razionale.

(ii) Dimostrare che una funzione f meromorfa su $\mathbb{C}$ è razionale se verifica $\lim_{|z|\to+\infty}|f(z)| = +\infty$.

[Suggerimento: dimostrare che la funzione $g(z) := f(1/z)$ ha una singolarità isolata in 0 e applicare il teorema di Casorati-Weiestrass....]

ESERCIZIO 5 (teorico) (10 punti)

(i) Definire i vari tipi di singolarità isolate.

(ii) Per ogni tipo di singolarità isolata, dare un esempio di una funzione avente quel tipo di singolarità isolata.

(iii) Supponiamo che f abbia una singolarità isolata in z_0. Come riconoscere il tipo di singolarità di f in z_0 guardando al limite $\lim_{z\to z_0}|f(z)|$? Giustificare la risposta.

(iv) Enunciare e dimostrare il teorema di Riemann sulle singolarità rimuovibili (o apparenti).

(v) Enunciare e dimostrare il teorema di Casorati-Weiestrass sulle singolarità essenziali.