

Nome candidato:
Numero di matricola:

APPELLO X DEL CORSO AC310 (A.A. 2014/2015)

Tutte le risposte vanno argomentate chiaramente e sinteticamente.

ESERCIZIO 1 (4 punti) Consideriamo la funzione meromorfa $f(z) := \frac{1}{z^2(1-z)}$ su $\mathbb{C}$. Trovare lo sviluppo di Laurent di f nelle seguenti regioni:

- (a) $R_1 = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$;
- (b) $R_2 = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z|\}$.

ESERCIZIO 2 (5 punti) Dimostrare che la serie

$$\frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{z^2 - n^2}$$

definisce una funzione meromorfa su $\mathbb{C}$ e determinare i suoi poli e i loro rispettivi ordini.

ESERCIZIO 3 (5 punti) Calcolare l'integrale della funzione $\frac{1}{\sin z}$ lungo la circonferenza di raggio 8 e centro l'origine.

ESERCIZIO 4 (teorico) (3 punti per ogni dimostrazione) Esporre le dimostrazioni che conosci del teorema fondamentale dell'algebra usando l'analisi complessa.

[Suggerimento: Si può usare, ad esempio, il principio del massimo modulo, il teorema di Liouville, il teorema di Roché, il principio dell'argomento, etc...]

ESERCIZIO 5 (10 punti) Sia U un aperto connesso contenuto in $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

- (i) Dimostrare che se esiste un logaritmo su U (cioè una funzione olomorfa $\log : U \rightarrow \mathbb{C}$ tale che $e^{\log(z)} = z$ per ogni $z \in U$) allora U è semplicemente connesso.
- (ii) Dimostrare che se U è semplicemente connesso allora esiste una primitiva $F : U \rightarrow \mathbb{C}$ della funzione $1/z$ su U .
- (iii) Dimostrare che se esiste una primitiva della funzione $1/z$ su U allora esiste un logaritmo su U .