Nome candidato:
Numero di matricola:

PRIMA PROVA IN ITINERE DEL CORSO AC310

Tutte le risposte vanno argomentate chiaramente e sinteticamente.

ESERCIZIO 1 (10 punti) Per ogni numero complesso $\alpha \in \mathbb{C}$ si consideri la serie di potenze formale

$$(1+T)^\alpha := \sum_{n\geq 0} \binom{\alpha}{n} T^n = 1 + \sum_{n\geq 1} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n(n-1)\cdots 1} T^n \in \mathbb{C}[[T]].$$

(i) (4 punti) Dimostrare che il raggio di convergenza R di $(1+T)^\alpha$ è uguale a

$$R = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha \in \mathbb{N}, \\ 1 & \text{se } \alpha \notin \mathbb{N}. \end{cases}$$

(ii) (6 punti) Dimostrare che per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$ vale la seguente identità tra serie di potenze formali

$$(1+T)^\alpha = \exp(\alpha \log(1+T)), \tag{0.1}$$

dove, come al solito, $\exp(T)$ e $\log(1+T)$ sono le serie di potenze formali definite da:

$$\exp(T) := \sum_{n\geq 0} \frac{T^n}{n!} \in \mathbb{C}[[T]] \quad \text{e} \quad \log(1+T) := \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}T^n}{n} \in \mathbb{C}[[T]].$$

[*Suggerimento:* Considerare prima il caso $\alpha \in \mathbb{R}$. Successivamente, si osservi che il coefficiente di T^n in ciascuna delle due serie in (0.1) è un polinomio in α...]

ESERCIZIO 2 (10 punti)

(i) (4 punti) Dimostrare che non esiste nessuna funzione olomorfa $l : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ tale che $l'(z) = \dfrac{1}{z}$ per ogni $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

(ii) (6 punti) Dimostrare che non esiste nessuna funzione olomorfa $\widetilde{l} : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ tale che $e^{\widetilde{l}(z)} = z$ per ogni $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ dove, come al solito, e^w è la funzione esponenziale (analitica su tutto $\mathbb{C}$)

$$e^w := \sum_{n\geq 0} \frac{w^n}{n!}.$$

ESERCIZIO 3 (teorico) (8 punti) Enunciare e dimostrare la formula integrale (o locale) di Cauchy.

ESERCIZIO 4 (7 punti) Sia $f(T) = \sum_{n\geq 0} a_n T^n \in \mathbb{C}[[T]]$ una serie di potenze formale con raggio di convergenza $R > 1$. Sia γ la circonferenza unitaria percorsa in senso antiorario, cioè la curva con parametrizzazione

$$\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$$
$$t \mapsto e^{2\pi i t}.$$

Consideriamo la funzione g, olomorfa su $D_R(0) \setminus \{0\} := \{z \in \mathbb{C} \,:\, |z| < R\} \setminus \{0\}$, definita come

$$g(z) := \sum_{-N\leq n<0} a_n z^n + f(z) = \sum_{n\geq -N} a_n z^n \quad \text{per un certo } N \in \mathbb{N}_{>0}.$$

Calcolare $\int_\gamma g(z)dz$.