Nome candidato:
Numero di matricola:

SECONDA PROVA IN ITINERE DEL CORSO AC310

Tutte le risposte vanno argomentate chiaramente.

ESERCIZIO 1 (8 punti)

(i) (4 punti) Dimostrare che se $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ è olomorfa non constante allora $\mathbb{C} - f(\mathbb{C})$ è vuoto oppure consiste di un solo punto.
[Suggerimento: Applicare il teorema di uniformizzazione a $f(\mathbb{C})$ e usare il teorema di Liouville]

(ii) (2 punti) Dimostrare che un polinomio $P(z) \in \mathbb{C}[z]$ di grado maggiore di zero definisce una funzione olomorfa non constante $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tale che $\mathbb{C} - P(\mathbb{C}) = \emptyset$.

(iii) (2 punti) Per ogni $w \in \mathbb{C}$, dare un esempio di una funzione olomorfa g non constante su $\mathbb{C}$ tale che $\mathbb{C} - g(\mathbb{C}) = \{w\}$.

ESERCIZIO 2 (8 punti)

Siano $z_1, \ldots, z_n$ numeri complessi tutti distinti tra di loro. Sia C una circonferenza centrata in zero e orientata in senso antiorario tale che ogni punto z_j (per $j = 1, \ldots, n$) si trova all'interno di C. Calcolare

$$\int_C \frac{1}{(z - z_1) \ldots (z - z_n)} dz.$$

ESERCIZIO 3 (teorico) (8 punti)

(i) (2 punti) Enunciare la formula globale di Cauchy e il teorema di invarianza omologica.

(ii) (3 punti) Dimostrare il teorema di invarianza omologica assumendo la formula globale di Cauchy.

(iii) (3 punti) Dimostrare la formula globale di Cauchy assumendo il teorema di invarianza omologica.

ESERCIZIO 4 (13 punti)

Sia $\underline{\sqrt[n]{z}}$ la funzione analitica globale i cui rami sono gli elementi di funzione $(U, \sqrt[n]{z})$, dove $U \subseteq \mathbb{C}$ è un dominio e $\sqrt[n]{z}$ è una funzione olomorfa su U tale che $(\sqrt[n]{z})^n = z$ per ogni $z \in U$. Dimostrare che:

(i) (4 punti) $\underline{\sqrt[n]{z}}$ è una funzione analitica globale ben definita;

(ii) (3 punti) il dominio di definizione $\mathcal{D}(\underline{\sqrt[n]{z}})$ di $\sqrt[n]{z}$ è $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} - \{0\}$;

(iii) (3 punti) se $V \subset \mathbb{C}^*$ è semplicemente connesso allora esiste un ramo $(V, \sqrt[n]{z}) \in \underline{\sqrt[n]{z}}$;

(iv) (3 punti) non esiste alcun ramo $(\mathbb{C}^*, \sqrt[n]{z}) \in \underline{\sqrt[n]{z}}$.