SOLUZIONI DELL'APPELLO A DEL CORSO AC310 (A.A. 2014/2015)

ESERCIZIO 1 (4 punti)

Consideriamo la funzione meromorfa $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ su $\mathbb{C}$. Trovare lo sviluppo in serie di Laurent di f nelle seguenti regioni:

(a) $R_1 := \{z \in \mathbb{C} \, : \, |z| < 1\}$;
(b) $R_2 := \{z \in \mathbb{C} \, : \, 1 < |z| < 2\}$;
(c) $R_3 := \{z \in \mathbb{C} \, : \, 2 < |z|\}$.

SOLUZIONE:
Si veda Capitolo V.§2, Esercizio 8 del libro di Lang e la soluzione nel libro di Shakarchi.

ESERCIZIO 2 (6 punti)

Calcolare l'integrale definito $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^4+1} dx$.

[Suggerimento: calcolare l'integrale della funzione olomorfa $f(z) = \dfrac{1}{z^4+1}$ lungo la curva chiusa che consiste nel segmento $[-R, +R]$ e nella semicirconferenza superiore di centro 0 e raggio R e poi prendere il limite $R \to +\infty$]

SOLUZIONE:
Si veda Esempio a pagina 193 del libro di Lang.

ESERCIZIO 3 (8 punti) Sia U un aperto connesso contenuto in $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$.
Dimostrare che esiste un logaritmo log su U (cioè esiste una funzione olomorfa $\log : U \to \mathbb{C}$ tale che $e^{\log(z)} = z$) se e solo se U è semplicemente connesso.

SOLUZIONE:

- Per l'implicazione *se*: si veda l'Esempio a pagina 120-121 del libro di Lang.
- Dimostriamo ora l'implicazione *solo se*: supponiamo che esista $\log z$ su U e vogliamo dimostrare che U è semplicemente connesso. Siccome $e^{\log z} = z$ per ogni $z \in U$, allora passando ai gruppi fondamentali otteniamo che la composizione
$$\pi_1(U, z_0) \xrightarrow{(\log z)_*} \pi_1(\mathbb{C}, \log z_0) \xrightarrow{(e^z)_*} \pi_1(U, z_0)$$
è l'identità, per ogni punto base $z_0 \in U$. Siccome $\pi_1(\mathbb{C}, \log z_0) = 0$, questo può accadere se e solo se $\pi_1(U, z_0) = 0$, cioè se U è semplicemente connesso (usando il fatto che U è connesso).

ESERCIZIO 4 (8 punti)

(i) (2 punti) Enunciare il teorema di Rouché.
(ii) (6 punti) Dimostrare il teorema fondamentale dell'algebra usando il teorema di Rouché.
[Suggerimento: per un polinomio $P(z) = a_n z^n + \ldots + a_0 \in \mathbb{C}[z]$ di grado n, confrontare le radici di $P(z)$ con quelle di $a_n z^n$].

SOLUZIONE:

(i) Si veda Teorema 1.6 del Capitolo VI, §1 del libro di Lang.
(ii) Si veda Esercizio 33 del Capitolo VI, §1 del libro di Lang e la soluzione nel libro di Shakarchi.

ESERCIZIO 5 (teorico) (8 punti)

(i) (4 punti) Calcolare il gruppo degli automorfismi di $\mathbb{C}$ (con dimostrazione).
(ii) (4 punti) Calcolare il gruppo degli automorfismi di $\mathbb{D}$, dove $\mathbb{D}$ è il disco unitario di $\mathbb{C}$ (con dimostrazione).

SOLUZIONE:

(i) Si veda Teorema 3.3 del Capitolo V, §3 del libro di Lang.
(ii) Si veda Capitolo VII, §2 del libro di Lang.