Nome candidato:
Numero di matricola:

APPELLO B DEL CORSO AC310 (A.A. 2014/2015)

Tutte le risposte vanno argomentate chiaramente.

ESERCIZIO 1 (6 punti)
Dimostrare che la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(z+n)^2}$$

definisce una funzione meromorfa su $\mathbb{C}$ e determinare i suoi poli e i loro rispettivi ordini.

Soluzione:
Si veda Esercizio V.3.1(c) del libro di Lang e la soluzione nel libro di Shakarchi.

ESERCIZIO 2 (6 punti)
Calcolare l'integrale (per ogni $n \geq 2$)

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^n} dx.$$

[Suggerimento: Calcolare l'integrale della funzione $f(z) = \frac{1}{1+z^n}$ lungo la curva chiusa γ_R formata dal segmento da 0 a R, dall'arco di circonferenza da R a $Re^{2\pi i/n}$ e dal segmento da $Re^{2\pi i/n}$ a 0, per $R \to +\infty$.]

Soluzione:
Si veda Esercizio VI.2.1(b) del libro di Lang e la soluzione nel libro di Shakarchi.

ESERCIZIO 3 (teorico) (8 punti)
Enunciare e dimostrare il teorema dei residui (usando il teorema dei Cauchy sull'invarianza omologica).

Soluzione:
Si veda il Teorema 1.2 del Capitolo VI del libro di Lang, la cui dimostrazione usa il teorema dei residui locale (Teorema 1.1 del Capitolo VI di loc. cit) e il Teorema 2.4 del Capitolo IV di loc. cit.

ESERCIZIO 4 (8 punti)
Sia $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa non costante. Dimostrare che l'immagine di f è densa in $\mathbb{C}$.
[Suggerimento: Considerare lo sviluppo in serie di potenze di f in 0 e studiare la singolarità della funzione $g(z) := f(1/z)$ in 0.]

Soluzione:
Si veda Esercizio V.3.6 del libro di Lang e la soluzione nel libro di Shakarchi.

ESERCIZIO 5 (8 punti)

(i) (2 punti) Enunciare il principio dell'argomento.
(ii) (6 punti) Dimostrare il teorema fondamentale dell'algebra usando il principio dell'argomento.
[Suggerimento: Sia C_R la circonferenza di raggio R centrata in 0 e sia $P(z) \in \mathbb{C}[z]$ un polinomio di grado n. Confrontare $\frac{1}{2\pi i}\int_{C_R} \frac{P'(z)}{P(z)} dz$ e $\frac{1}{2\pi i}\int_{C_R} \frac{n}{z} dz$ per $R \to +\infty$.]

Soluzione:

(i) Si veda il Teorema 1.5 del Capitolo VI del libro di Lang e la discussione che ne segue.
(ii) Parametrizziamo la circonferenza C_R tramite la funzione

$$\begin{aligned} \gamma_R : [0,1] &\longrightarrow \mathbb{C} \\ t &\mapsto Re^{2\pi i t}. \end{aligned}$$

Allora, dalla definizione di integrale curvilineo, otteniamo che (per ogni $R > 0$)

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_R} \frac{n}{z} dz = \frac{1}{2\pi i}\int_0^1 \frac{n(Re^{2\pi i t})'}{Re^{2\pi i t}} dt = \int_0^1 n \cdot dt = n. \tag{0.1}$$

Scriviamo ora il polinomio $P(z)$ di grado $n > 0$ come $P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ con $a_n \neq 0$. Allora abbiamo che

$$\frac{P'(z)}{P(z)} - \frac{n}{z} = \frac{zP'(z) - nP(z)}{zP(z)} = \frac{z(\sum_{k=0}^{n} a_k k z^{k-1}) - n(\sum_{k=0}^{n} a_k z^k)}{zP(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{n} a_k (k-n) z^k}{zP(z)} =$$

$$= \frac{\sum_{k=0}^{n-1} a_k (k-n) z^k}{\sum_{k=0}^{n} a_k z^{k+1}}.$$

Dunque la funzione razionale $\dfrac{P'(z)}{P(z)} - \dfrac{n}{z}$ è quoziente di un polinomio di grado $n-1$ per un polinomio di grado $n+1$. Da ciò si evince che esiste una constante $C > 0$ e un numero $R_0 > 0$ tali che

$$\left| \frac{P'(z)}{P(z)} - \frac{n}{z} \right| \leq \frac{C}{R^2} \quad \text{per ogni } z \in C_R \text{ con } R \geq R_0.$$

Quindi, siccome la circonferenza C_R ha lunghezza $2\pi R$, abbiamo la stima (per $R \geq R_0$)

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} \left(\frac{P'(z)}{P(z)} - \frac{n}{z} \right) dz \right| \leq R \sup_{z \in C_R} \left| \frac{P'(z)}{P(z)} - \frac{n}{z} \right| \leq \frac{C}{R} \xrightarrow{R \to +\infty} 0. \tag{0.2}$$

Combinando (0.1) e (0.2) e tenendo presente che $\dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{C_R} \dfrac{P'(z)}{P(z)}$ è un numero naturale uguale al numero di zeri (contati con molteplicità) di $P(z)$ all'interno di C_R per il principio dell'argomento (in quanto $P(z)$ è una funzione olomorfa su $\mathbb{C}$), otteniamo che:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} \frac{P'(z)}{P(z)} = n \text{ per } R \gg 0.$$

Per il sopra citato principio dell'argomento, ne deduciamo che $P(z)$ ha n radici (contate con la molteplicità) su $\mathbb{C}$, che è esattamente il teorema fondamentale dell'algebra.