Nome candidato:
Numero di matricola:

**APPELLO C DEL CORSO AC310 (A.A. 2014/2015)**

Tutte le risposte vanno argomentate chiaramente e sinteticamente.

**ESERCIZIO 1** (4 punti) Trovare lo sviluppo in serie di potenze della funzione $f(z) := \dfrac{1}{1+z^2}$ nel punto $z = 1$ e discutere il raggio di convergenza di questa serie.

**Soluzione:**
Si veda Esercizio V.2.11 del libro di Lang e la soluzione nel libro di Shakarchi.

**ESERCIZIO 2** (4 punti) Calcolare l'integrale della funzione $f(z) = \dfrac{z^2}{(z+1)(z-1)^2}$ lungo la circonferenza di raggio 1 e centro 1.

**Soluzione:**
Si veda Esempio a pagina 117 del Capitolo VI.1 del libro di Lang.

**ESERCIZIO 3** (3 punti per ogni dimostrazione) Esporre le dimostrazioni che conosci del teorema fondamentale dell'algebra usando l'analisi complessa.

[Suggerimento: Si può usare, ad esempio, il principio del massimo modulo, il teorema di Liouville, il teorema di Rochè, il principio dell'argomento, etc...]

**Soluzione:**
Si veda:

(i) Per la dimostrazione con il principio del massimo modulo: Lang, Capitolo II, Theorem 7.3.
(ii) Per la dimostrazione con il teorema di Liouville: Lang, Capitolo III, Corollary 7.6.
(iii) Per la dimostrazione con il teorema di Rouchè: Esercizio VI.1.33 del libro di Lang e la soluzione nel libro di Shakarchi.
(iv) Per la dimostrazione con il principio dell'argomento: si veda Esercizio 5(ii) dell'Appello B.

**ESERCIZIO 4** (8 punti)

(i) Dare l'esempio di una funzione meromorfa su $\mathbb{C}$ ma non razionale.
(ii) Dimostrare che una funzione $f$ meromorfa su $\mathbb{C}$ è razionale se verifica $\lim_{|z|\to+\infty}|f(z)| = +\infty$.
[Suggerimento: dimostrare che la funzione $g(z) := f(1/z)$ ha una singolarità isolata in 0 e applicare il teorema di Casorati-Weiestrass....]

**Soluzione:**

(i) La funzione $f(z) = e^z$ è olomorfa su $\mathbb{C}$ (dunque in particolare meromorfa) ma è chiaramente non polinomiale (per esempio perchè il suo sviluppo in serie in 0 ha infiniti termini). Dunque $f$ non è una funzione razionale perchè le uniche funzioni razionali olomorfe su $\mathbb{C}$ sono i polinomi.
(ii) Si veda Esercizio V.3.9 del libro di Lang e la soluzione nel libro di Shakarchi.

**ESERCIZIO 5 (teorico)** (10 punti)

(i) Definire i vari tipi di singolarità isolate.
(ii) Per ogni tipo di singolarità isolata, dare un esempio di una funzione avente quel tipo di singolarità isolata.
(iii) Supponiamo che $f$ abbia una singolarità isolata in $z_0$. Come riconoscere il tipo di singolarità di $f$ in $z_0$ guardando al limite $\lim_{z\to z_0}|f(z)|$? Giustificare la risposta.
(iv) Enunciare e dimostrare il teorema di Riemann sulle singolarità rimuovibili (o apparenti).
(v) Enunciare e dimostrare il teorema di Casorati-Weiestrass sulle singolarità essenziali.