SOLUZIONI DELL'APPELLO X DEL CORSO AC310 (A.A. 2014/2015)

ESERCIZIO 1 (4 punti) Consideriamo la funzione meromorfa $f(z) := \dfrac{1}{z^2(1-z)}$ su $\mathbb{C}$. Trovare lo sviluppo di Laurent di f nelle seguenti regioni:

(a) $R_1 = \{z \in \mathbb{C} \,:\, 0 < |z| < 1\}$;
(b) $R_2 = \{z \in \mathbb{C} \,:\, 1 < |z|\}$.

Soluzione: Si veda Esercizio V.2.10 del libro di Lang e la soluzione nel libro di Shakarchi.

ESERCIZIO 2 (5 punti) Dimostrare che la serie

$$\frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{z^2 - n^2}$$

definisce una funzione meromorfa su $\mathbb{C}$ e determinare i suoi poli e i loro rispettivi ordini.

Soluzione: Si veda Esempio nela Sezione V.3 del libro di Lang.

ESERCIZIO 3 (5 punti) Calcolare l'integrale della funzione $\dfrac{1}{\sin z}$ lungo la circonferenza di raggio 8 e centro l'origine.

Soluzione: Si veda Esercizio VI.1.26(a) del libro di Lang e la soluzione nel libro di Shakarchi.

ESERCIZIO 4 (teorico) (3 punti per ogni dimostrazione) Esporre le dimostrazioni che conosci del teorema fondamentale dell'algebra usando l'analisi complessa.

[Suggerimento: Si può usare, ad esempio, il principio del massimo modulo, il teorema di Liouville, il teorema di Rochè, il principio dell'argomento, etc...]

Soluzione:
Si veda:

(i) Per la dimostrazione con il principio del massimo modulo: Lang, Capitolo II, Theorem 7.3.
(ii) Per la dimostrazione con il teorema di Liouville: Lang, Capitolo III, Corollary 7.6.
(iii) Per la dimostrazione con il teorema di Rouchè: Esercizio VI.1.33 del libro di Lang e la soluzione nel libro di Shakarchi.
(iv) Per la dimostrazione con il principio dell'argomento: si veda Esercizio 5(ii) dell'Appello B.

ESERCIZIO 5 (10 punti) Sia U un aperto connesso contenuto in $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

(i) Dimostrare che se esiste un logaritmo su U (cioè una funzione olomorfa $\log : U \to \mathbb{C}$ tale che $e^{\log(z)} = z$ per ogni $z \in U$) allora U è semplicemente connesso.
(ii) Dimostrare che se U è semplicemente connesso allora esiste una primitiva $F : U \to \mathbb{C}$ della funzione $1/z$ su U.
(iii) Dimostrare che se esiste una primitiva della funzione $1/z$ su U allora esiste un logaritmo su U.

Soluzione:

(a) Supponiamo che esista $\log z$ su U e vogliamo dimostrare che U è semplicemente connesso. Siccome $e^{\log z} = z$ per ogni $z \in U$, allora passando ai gruppi fondamentali otteniamo che la composizione

$$\pi_1(U, z_0) \xrightarrow{(\log z)_*} \pi_1(\mathbb{C}, \log z_0) \xrightarrow{(e^z)_*} \pi_1(U, z_0)$$

è l'identità, per ogni punto base $z_0 \in U$. Siccome $\pi_1(\mathbb{C}, \log z_0) = 0$, questo può accadere se e solo se $\pi_1(U, z_0) = 0$, cioè se U è semplicemente connesso (usando il fatto che U è connesso).

(b) La funzione $1/z$ é olomorfa su $U \subset \mathbb{C}^*$ e U è connesso e semplicemente connesso per ipotesi. Dunque dal Teorema di Cauchy di invarianza omotopica, segue che la funzione

$$F(z) := \int_{z_0}^{z} \frac{1}{z} dz$$

dove l'integrale è calcolato rispetto ad un cammino da un punto base z_0 (arbitrariamente scelto) a z, è ben definita (cioè non dipende dal cammino scelto) ed è una primitiva (olomorfa) di $1/z$.

(c) La dimostrazione di questa implicazione è contenuta nell'Esempio a pagina 120-121 della Sezione III.6 del libro di Lang.