SOLUZIONI DELLA PRIMA PROVA IN ITINERE DEL CORSO AC310
(19 NOVEMBRE 2014)

ESERCIZIO 1 (10 punti) Per ogni numero complesso $\alpha \in \mathbb{C}$ si consideri la serie di potenze formale

$$(1+T)^\alpha := \sum_{n\geq 0} \binom{\alpha}{n} T^n = 1 + \sum_{n\geq 1} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n(n-1)\cdots 1} T^n \in \mathbb{C}[[T]].$$

(i) (4 punti) Dimostrare che il raggio di convergenza R di $(1+T)^\alpha$ è uguale a

$$R = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha \in \mathbb{N}, \\ 1 & \text{se } \alpha \notin \mathbb{N}. \end{cases}$$

(ii) (6 punti) Dimostrare che per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$ vale la seguente identità tra serie di potenze formali

$$(1+T)^\alpha = \exp(\alpha \log(1+T)), \tag{0.1}$$

dove, come al solito, $\exp(T)$ e $\log(1+T)$ sono le serie di potenze formali definite da:

$$\exp(T) := \sum_{n\geq 0} \frac{T^n}{n!} \in \mathbb{C}[[T]] \quad \text{e} \quad \log(1+T) := \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}T^n}{n} \in \mathbb{C}[[T]].$$

[*Suggerimento:* Considerare prima il caso $\alpha \in \mathbb{R}$. Successivamente, si osservi che il coefficiente di T^n in ciascuna delle due serie in (0.1) è un polinomio in α...]

Soluzione:

(i) Se $\alpha \in \mathbb{N}$, allora $\binom{\alpha}{n} = 0$ per ogni $n > \alpha$; dunque la serie che definisce $(1+T)^\alpha$ è un polinomio e quindi ha raggio di convergenza infinito. Se invece $\alpha \notin \mathbb{N}$, allora $\binom{\alpha}{n} \neq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e abbiamo che

$$\left| \frac{\binom{\alpha}{n}}{\binom{\alpha}{n+1}} \right| = \left| \frac{n+1}{\alpha - n} \right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

Dunque per il criterio del rapporto si ha che

$$\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left| \binom{\alpha}{n} \right|} = 1,$$

e quindi il raggio di convergenza è 1 per il criterio della radice.

(ii) Se $\alpha \in \mathbb{R}$, sappiamo dall'analisi reale che

$$(1+x)^\alpha = \exp(\alpha \log(1+x)) \text{ per ogni } x \in \mathbb{R} \text{ tale che } |x| < 1.$$

Dunque, per il principio di identità di serie convergenti, deduciamo che (0.1) vale per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$. Sviluppando in serie di potenze i due membri di (0.1), abbiamo che

$$(1+T)^\alpha = \sum_{n\geq 0} a_n(\alpha) T^n,$$

$$\exp(\alpha \log(1+T)) = \sum_{n\geq 0} b_n(\alpha) T^n,$$

dove $a_n(\alpha)$ e $b_n(\alpha)$ sono polinomi in $\alpha \in \mathbb{C}$. Per quanto dimostrato precedentemente, si ha che $a_n(\alpha) = b_n(\alpha)$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$. Dunque, siccome un polinomio può avere solo un numero finito di zeri, ne deduciamo che $a_n = b_n \in \mathbb{C}[\alpha]$. Ciò implica che (0.1) vale per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$.

ESERCIZIO 2 (10 punti)

(i) (4 punti) Dimostrare che non esiste nessuna funzione olomorfa $l : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ tale che $l'(z) = \dfrac{1}{z}$ per ogni $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

(ii) (6 punti) Dimostrare che non esiste nessuna funzione olomorfa $\widetilde{l} : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ tale che $e^{\widetilde{l}(z)} = z$ per ogni $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ dove, come al solito, e^w è la funzione esponenziale (analitica su tutto $\mathbb{C}$)

$$e^w := \sum_{n \geq 0} \frac{w^n}{n!}.$$

Soluzione:

(i) Si consideri la circonferenza di raggio unitario percorsa in senso antiorario, cioè la curva chiusa

$$\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\},$$
$$t \mapsto e^{2\pi i t}.$$

Calcoliamo adesso l'integrale di $1/z$ lungo γ:

$$\int_\gamma \frac{1}{z} dz = \int_0^1 \frac{1}{e^{2\pi i t}} (e^{2\pi i t})' dt = 2\pi i \int_0^1 \frac{1}{e^{2\pi i t}} e^{2\pi i t} dt = 2\pi t.$$

Siccome tale integrale non è nullo, per il criterio di esistenza di una primitiva di una funzione olomorfa concludiamo che $1/z$ non ammette una primitiva su $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

(ii) <u>Soluzione n. 1:</u> Assumiamo per assurdo che una tale funzione $\widetilde{l}$ esista. Derivando l'identità $e^{\widetilde{l}(z)} = z$ in ogni punto di $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, otteniamo

$$1 = (z)' = (e^{\widetilde{l}(z)})' = e^{\widetilde{l}(z)} (\widetilde{l}(z))' = z\widetilde{l}'(z),$$

e dunque $\widetilde{l}'(z) = \dfrac{1}{z}$ per ogni $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Tuttavia tale funzione $\widetilde{l}$ non può esistere per il punto (i), assurdo.

<u>Soluzione n. 2:</u> Assumiamo per assurdo che una tale funzione $\widetilde{l}$ esista. Dunque abbiamo che la seguente composizione di funzioni olomorfe

$$\mathbb{C} \setminus \{0\} \xrightarrow{\widetilde{l}} \mathbb{C} \xrightarrow{e^{\cdot}} \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

è l'identità su $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Passando ai gruppi fondamentali rispetto ai punti base $1 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ e $\widetilde{l}(1) \in \mathbb{C}$, otteniamo che la composizione dei seguenti omomorfismi di gruppi

$$\pi_1(\mathbb{C} \setminus \{0\}, 1) \xrightarrow{\widetilde{l}_*} \pi_1(\mathbb{C}, \widetilde{l}(1)) \xrightarrow{(e^{\cdot})_*} \pi_1(\mathbb{C} \setminus \{0\}, 1)$$

è l'identità su $\pi_1(\mathbb{C} \setminus \{0\}, 1)$. Tuttavia, questo è un assurdo perché $\pi_1(\mathbb{C} \setminus \{0\}, 1) \cong \mathbb{Z}$ mentre $\pi_1(\mathbb{C}, \widetilde{l}(1)) = \{1\}$.

ESERCIZIO 3 (teorico) (8 punti) Enunciare e dimostrare la formula integrale (o locale) di Cauchy.

Soluzione: Si veda il libro del Lang, Chapter III, Theorem 7.1 oppure il libro di Alfhors, Chapter 4, Section 2.2.

ESERCIZIO 4 (7 punti) Sia $f(T) = \sum_{n \geq 0} a_n T^n \in \mathbb{C}[[T]]$ una serie di potenze formale con raggio di convergenza $R > 1$. Sia γ la circonferenza unitaria percorsa in senso antiorario, cioè la curva con parametrizzazione

$$\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$$
$$t \mapsto e^{2\pi i t}.$$

Consideriamo la funzione g, olomorfa su $D_R(0) \setminus \{0\} := \{z \in \mathbb{C} \,:\, |z| < R\} \setminus \{0\}$, definita come

$$g(z) := \sum_{-N \leq n < 0} a_n z^n + f(z) = \sum_{n \geq -N} a_n z^n \quad \text{per un certo } N \in \mathbb{N}_{>0}.$$

Calcolare $\int_\gamma g(z) dz$.

Soluzione:

Per il teorema di convergenza delle serie di potenze, per ogni R' tale che $1 < R' < R$, la serie $\sum_{n \geq 0} a_n T^n$ converge uniformemente e assolutamente sul disco $D_{R'}(0)$ di raggio R' centrato in 0. Siccome la curva γ è contenuta in $D_{R'}(0)$, per il teorema di integrazione di serie uniformemente convergenti abbiamo che:

$$\int_\gamma g(z) dz = \sum_{-N \leq n < 0} a_n \int_\gamma z^n + \int_\gamma f(z) dz = \sum_{n \geq -N} a_n \int_\gamma z^n dz \tag{0.2}$$

Calcoliamo ora l'integrale di z^n lungo γ:

$$\int_\gamma z^n dz = \int_0^1 e^{2\pi i n t}(e^{2\pi i t})' dt = 2\pi i \int_0^1 e^{2\pi i (n+1)t} dt =$$

$$= \begin{cases} 2\pi i \int_0^1 1 dt = 2\pi i & \text{se } n = -1, \\ 2\pi i \int_0^1 \frac{(e^{2\pi i (n+1)t})'}{2\pi i (n+1)} dt = \frac{(e^{2\pi i (n+1)t})_{|t=1} - (e^{2\pi i (n+1)t})_{|t=0}}{n+1} = 0 & \text{se } n \neq -1. \end{cases} \tag{0.3}$$

Dunque, mettendo insieme (0.2) e (0.3), otteniamo che

$$\int_\gamma g(z) dz = 2\pi i a_{-1}.$$