Nome candidato:
Numero di matricola:

SOLUZIONI DELLA SECONDA PROVA IN ITINERE DEL CORSO AC310

ESERCIZIO 1 (8 punti)

(i) (4 punti) Dimostrare che se $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ è olomorfa non constante allora $\mathbb{C} - f(\mathbb{C})$ è vuoto oppure consiste di un solo punto.
[Suggerimento: Applicare il teorema di uniformizzazione a $f(\mathbb{C})$ e usare il teorema di Liouville]

(ii) (2 punti) Dimostrare che un polinomio $P(z) \in \mathbb{C}[z]$ di grado maggiore di zero definisce una funzione olomorfa non constante $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tale che $\mathbb{C} - P(\mathbb{C}) = \emptyset$.

(iii) (2 punti) Per ogni $w \in \mathbb{C}$, dare un esempio di una funzione olomorfa g non constante su $\mathbb{C}$ tale che $\mathbb{C} - g(\mathbb{C}) = \{w\}$.

Soluzione:

(i) Notiamo innanzitutto che $f(\mathbb{C})$ è un aperto di $\mathbb{C}$ perché f è una funzione aperta per il teorema della funzione aperta. Supponiamo ora per assurdo che il complementare di $f(\mathbb{C})$ abbia cardinalità maggiore o uguale a due. Allora il teorema di uniformizzazione implica che il rivestimento universale $\widetilde{f(\mathbb{C})}$ è omeomorfo al disco unitario $\mathbb{D}$ e che l'applicazione di rivestimento universale $\pi : \mathbb{D} \to f(\mathbb{C})$ è olomorfa ed è un isomorfismo locale. Siccome $\mathbb{C}$ è semplicemente connesso, la mappa f si fattorizza tramite la mappa π per la proprietà universale del rivestimento universale, i.e. esiste $g : \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ continua tale che il seguente diagramma è commutativo

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{D} \arrow[d, "\pi"] \\ \mathbb{C} \arrow[ur, "g"] \arrow[r, "f"] & \mathbb{C} \end{tikzcd}$$

Siccome la mappa π è un isomorfismo locale e f è olomorfa per ipotesi, allora la mappa g sarà anch'essa olomorfa (esercizio per il lettore!). Ora il teorema di Liouville implica che g è una funzione costante, e dunque anche f è costante, assurdo.

(ii) Per ogni $w \in \mathbb{C}$, il polinomio $\widetilde{P}(z) := P(z) - w \in \mathbb{C}[z]$ ha grado maggiore di zero e dunque per il teorema fondamentale dell'algebra esso ammetterà una radice $z_0 \in \mathbb{C}$. Per costruzione, abbiamo che $0 = \widetilde{P}(z_0) = P(z_0) - w$ e dunque $w \in \mathrm{Im}(P)$. Siccome w era un elemento arbitrario di $\mathbb{C}$, concludiamo che P è suriettiva.

(iii) Per ogni $w \in \mathbb{C}$, la funzione olomorfa

$$\begin{aligned} g : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C}, \\ z &\mapsto e^z + w, \end{aligned}$$

è tale che $\mathbb{C} - g(\mathbb{C}) = \{w\}$, come si evince facilmente dal fatto (ben noto) che l'immagine della funzione esponenziale complessa è $\mathbb{C}^*$.

ESERCIZIO 2 (8 punti)

Siano $z_1, \ldots, z_n$ numeri complessi tutti distinti tra di loro. Sia C una circonferenza centrata in zero e orientata in senso antiorario tale che ogni punto z_j (per $j = 1, \ldots, n$) si trova all'interno di C. Calcolare

$$\int_C \frac{1}{(z - z_1) \ldots (z - z_n)} dz.$$

Soluzione:

Notiamo che $f(z) := \dfrac{1}{(z - z_1) \ldots (z - z_n)}$ è olomorfa su $\mathbb{C} \setminus \{z_1, \ldots, z_n\}$, ciascuno dei punti z_i non appartiene a C e la curva C è omotopa a zero (e dunque anche omologa a zero) su $\mathbb{C}$ perché $\mathbb{C}$ è semplicemente connesso. Dunque possiamo applicare il teorema dei residui per dedurre che

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{i=1}^{n} W(C, z_i) \cdot \mathrm{Res}_{z_i}(f(z)). \tag{0.1}$$

Siccome C è una curva semplice chiusa orientata in senso antiorario e z_i sono contenuti all'interno di C, abbiamo che

$$W(C, z_i) = 1 \text{ per ogni } i = 1, \dots, n. \tag{0.2}$$

Inoltre, per ogni $i = 1, \dots, n$, abbiamo che $f(z) = \dfrac{1}{(z - z_i)} g_i(z)$ con $g_i(z) = \displaystyle\prod_{j \neq i} \frac{1}{(z - z_j)}$ funzione olomorfa in z_i. Dunque confrontando lo sviluppo in serie di g in z_i con quello in serie di Laurent di f in z_i, si vede facilmente che

$$\mathrm{Res}_{z_i}(f(z)) = g_i(z_i) = \prod_{j \neq i} \frac{1}{(z_i - z_j)}. \tag{0.3}$$

Dunque, combinando (0.1), (0.2) and (0.3), deduciamo che

$$\int_C \frac{1}{(z - z_1) \dots (z - z_n)} dz = 2\pi i \sum_{i=1}^{n} \prod_{j \neq i} \frac{1}{(z_i - z_j)}. \tag{0.4}$$

ESERCIZIO 3 (teorico) (8 punti)

(i) (2 punti) Enunciare la formula globale di Cauchy e il teorema di invarianza omologica.
(ii) (3 punti) Dimostrare il teorema di invarianza omologica assumendo la formula globale di Cauchy.
(iii) (3 punti) Dimostrare la formula globale di Cauchy assumendo il teorema di invarianza omologica.

Soluzione:

(i) *Formula globale di Cauchy*: Sia γ un ciclo in un dominio $U \subseteq \mathbb{C}$ e omologo a zero in U. Sia $f : U \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa su U e sia $z_0 \in U \setminus \gamma$. Allora vale che

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i \cdot W(\gamma, z_0) f(z_0).$$

Teorema di invarianza omologica: Siano η_1 e η_2 due cicli in un dominio $U \subseteq \mathbb{C}$ tali che η_1 e η_2 sono omologhi in U. Sia $f : U \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa su U. Allora vale che:

$$\int_{\eta_1} f(z) dz = \int_{\eta_2} f(z) dz.$$

(ii) Sia $\gamma := \eta_1 - \eta_2$. Dall'ipotesi su η_1 e η_2, segue che γ è un ciclo contenuto in U e omologo a 0 in U. Scegliamo un punto $z_0 \in U \setminus \gamma$ e consideriamo la funzione olomorfa F su U definita da $F(z) := (z - z_0) f(z)$. Chiaramente $F(z_0) = 0$ per costruzione. Applicando la formula globale di Cauchy e la linearità dell'integrale, otteniamo che

$$\int_{\eta_1} f(z) dz - \int_{\eta_2} f(z) dz = \int_\gamma f(z) dz = \int_\gamma \frac{F(z)}{(z - z_0)} dz = 2\pi i \cdot W(\gamma, z_0) F(z_0) = 0,$$

q.e.d.

(iii) Sia $U^* := U \setminus \{z_0\}$ e sia C una piccola circonferenza orientata in senso antiorario con centro in z_0 e interamente contenuta in U. La funzione $g(z) := \dfrac{f(z)}{(z - z_0)}$ è olomorfa su U^*. Inoltre, γ è omologo in U^* al ciclo $W(\gamma, z_0) \cdot C$. Infatti se $z \notin U$ allora

$$\begin{cases} W(\gamma, z) = 0 & \text{perché } \gamma \text{ é omologa a zero in } U, \\ W(W(\gamma, z_0) \cdot C, z) = W(\gamma, z_0) \cdot W(C, z) = 0 & \text{perché } z \text{ è all'esterno di } C. \end{cases}$$

D'altra parte, vale che:

$$W(W(\gamma, z_0) \cdot C, z_0) = W(\gamma, z_0) \cdot W(C, z_0) = W(\gamma, z_0),$$

perché z_0 appartiene all'interno di C e C é orientata in senso antiorario.

Dunque per il teorema di invarianza omologica e la linearità dell'integrale, otteniamo

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)} dz = \int_{W(\gamma, z_0) \cdot C} \frac{f(z)}{(z - z_0)} dz = W(\gamma, z_0) \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)} dz \tag{0.5}$$

Ora la formula integrale (o locale) di Cauchy implica che

$$\int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)} dz = 2\pi i f(z_0). \tag{0.6}$$

Combinando le formule (0.5) e (0.6), otteniamo la formula globale di Cauchy.

ESERCIZIO 4 (13 punti)

Sia $\underline{\sqrt[n]{z}}$ la funzione analitica globale i cui rami sono gli elementi di funzione $(U, \sqrt[n]{z})$, dove $U \subseteq \mathbb{C}$ è un dominio e $\sqrt[n]{z}$ è una funzione olomorfa su U tale che $(\sqrt[n]{z})^n = z$ per ogni $z \in U$. Dimostrare che:

(i) (4 punti) $\underline{\sqrt[n]{z}}$ è una funzione analitica globale ben definita;

(ii) (3 punti) il dominio di definizione $\mathcal{D}(\underline{\sqrt[n]{z}})$ di $\sqrt[n]{z}$ è $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} - \{0\}$;

(iii) (3 punti) se $V \subset \mathbb{C}^*$ è semplicemente connesso allora esiste un ramo $(V, \sqrt[n]{z}) \in \underline{\sqrt[n]{z}}$;

(iv) (3 punti) non esiste alcun ramo $(\mathbb{C}^*, \sqrt[n]{z}) \in \underline{\sqrt[n]{z}}$.

Soluzione:

(i) Innanzitutto osserviamo che se $n = 1$, allora ogni funzione $\sqrt[1]{z}$ su U coincide con z, e dunque $\underline{\sqrt[1]{z}}$ è la funzione analitica globale associata alla funzione intera $z \mapsto z$. Dunque in questo caso (i) e (iii) sono vere banalmente, mentre (ii) e (iv) sono false banalmente. Nel seguito assumeremo sempre che $n \geq 2$.

<u>*Soluzione I*</u>: Per definizione, ogni elemento di funzione $(U, \sqrt[n]{z})$ soddisfa l'equazione algebrica $P(\sqrt[n]{z}, z) = 0$, dove $P(w, z) := w^n - z \in \mathbb{C}[w, z]$. Chiaramente il polinomio $P(w, z) = w^n - z$ è irriducibile. Viceversa ogni elemento di funzione (U, f) che soddisfa l'equazione $P(f(z), z) = 0$ è per definizione della forma $(U, \sqrt[n]{z})$. Dunque, $\sqrt[n]{z}$ è la funzione analitica globale algebrica associata al polinomio irriducibile $P(w, z)$ (come visto a lezione), in particolare è ben definita.

<u>*Soluzione II*</u>: Senza usare le funzioni analitiche globali algebriche, esiste un secondo metodo di risoluzione che usa le proprietà della funzione analitica globale $\underline{\log z}$ (viste a lezione).

Proviamo prima i seguenti Lemmi che ci serviranno poi anche per i punti successivi.

<u>Lemma 1:</u> Se $U \subseteq \mathbb{C}$ è un dominio tale che esiste $\sqrt[n]{z}$ su U, allora $U \subseteq \mathbb{C}^*$.

Infatti, derivando la relazione $(\sqrt[n]{z})^n = z$ e moltiplicando poi ambo i membri per $\sqrt[n]{z}$, otteniamo l'uguaglian¡a di funzioni meromorfe su U:

$$\frac{(\sqrt[n]{z})'}{\sqrt[n]{z}} = \frac{1}{nz}.$$

Dunque se $0 \in U$, ne deduciamo che la derivata logaritmica $\dfrac{(\sqrt[n]{z})'}{\sqrt[n]{z}}$ di $\sqrt[n]{z}$ ha un polo semplice in 0 con residuo $1/n \notin \mathbb{Z}$. Ma questo é assurdo perchè sappiamo che il residuo della derivata logaritmica di una funzione olomorfa $f(z)$ in un punto z_0 è uguale all'ordine di $f(z)$ in z_0, che in particolare è un numero intero.

<u>Lemma 2:</u> Sia $U \subseteq \mathbb{C}^*$ un dominio in cui esiste un ramo $\log z$ di $\underline{\log z}$ (per esempio se U è un disco aperto contenuto in $\mathbb{C}^*$). Allora la funzione $e^{\frac{\log z}{n}}$ soddisfa la relazione $(e^{\frac{\log z}{n}})^n = z$.

Infatti, dalla definizione di log e le proprietà moltiplicative dell'esponenziale, segue che

$$(e^{\frac{\log z}{n}})^n = e^{\log z} = z \text{ per ogni } z \in U.$$

<u>Lemma 3:</u> Sia $U \subseteq \mathbb{C}^*$ un dominio su cui esistono due funzioni olomorfe $\sqrt[n]{z}$ e $\sqrt[n]{z}^*$ che verificano la relazione $(\sqrt[n]{z})^n = z = (\sqrt[n]{z}^*)^n$. Allora esiste un unico intero $0 \leq k \leq n-1$ tale che $\sqrt[n]{z}^* = e^{(2\pi i k)/n}\sqrt[n]{z}$ per ogni $z \in U$.

Infatti, il quoziente $q(z) := \dfrac{\sqrt[n]{z}^*}{\sqrt[n]{z}}$ è una funzione olomorfa su U (perché $\sqrt[n]{z}$ non é mai nulla in quanto $0 \notin U$) tale che $q(z)^n - 1 = 0$. Se fissiamo la radice n-esima primitiva $\zeta = e^{2\pi i/n}$, allora abbiamo una fattorizzazione $q(z)^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1}(q(z) - \zeta^k)$. Dunque, per ogni punto $z \in U$, esiste uno ed un solo intero $0 \leq k_z \leq n-1$ tale che $q(z) - \zeta^{k_z} = 0$. Allora esisterà un intero $0 \leq k \leq n-1$ tale che $q(z) - \zeta^k = 0$ per infiniti punti $z \in U$. Siccome $q(z) - \zeta^k$ ha zeri discreti in quanto olomorfa e U è connesso, allora deve valere che $q(z) - \zeta^k = 0$ per ogni $z \in U$, q.e.d.

Ora possiamo dimostrare il punto (i), dividendo la dimostrazione in tre passi.

(a) La definizione non è vuota, cioé esiste qualche elemento di funzione $(U, \sqrt[n]{z})$.
Questo segue dal Lemma 2 se U è un disco contenuto in $\mathbb{C}^*$, q.e.d.

(b) Se $(U, \sqrt[n]{z}) \sim (V, f(z))$, cioè $(U, \sqrt[n]{z})$ é in continuazione analitica con $(V, f(z))$, allora vale che $f(z)^n = z$ per ogni $z \in V$.

Infatti, basta assumere che $(U, \sqrt[n]{z})$ e $(V, f(z))$ siano in continuazione analitica diretta (iterando il ragionamento per catene di elementi di funzioni). Dunque, nell'aperto $U \cap V$ la funzione $f(z)$ coincide con $\sqrt[n]{z}$ e dunque verifica $f(z)^n = z$. Siccome $f(z)^n$ e z sono funzioni olomorfe sull'aperto connesso V che coincidono sul sottoinsieme $U \cap V$ non discreto, allora per il teorema sulla discretezza degli zeri di una funzione olomorfa si conclude che $f(z)^n = z$ su tutto V, q.e.d.

(c) Due elementi di funzione $(U_1, \sqrt[n]{z}^1)$ e $(U_2, \sqrt[n]{z}^2)$ sono in continuazione analitica.
Per il Lemma 1, vale che $U_1, U_2 \subseteq \mathbb{C}^*$. Prendiamo dei dischi $V_j \subseteq U_j$ per $j = 1, 2$ e denotiamo con $\sqrt[n]{z}^j$ la restrizione di $\sqrt[n]{z}^j$ a V_j. Osserviamo che, banalmente, vale che $(U_j, \sqrt[n]{z}^j) \sim (V_j, \sqrt[n]{z}^j)$ per $j = 1, 2$; siccome $\sim$ è una relazione d'equivalenza, basta allora dimostrare che $(V_1, \sqrt[n]{z}^1) \sim (V_2, \sqrt[n]{z}^2)$. Poiché V_j è un disco contenuto in $\mathbb{C}^*$, allora esisterà un ramo $(V_j, \log^j z) \in \underline{\log z}$. Combinando i Lemmi 2 e 3, segue che esistono interi $0 \leq k_j \leq n-1$ tali che

$$\sqrt[n]{z}^j = e^{\frac{2\pi i k_j}{n}} e^{\frac{\log^j z}{n}} = e^{\frac{\log^j z + 2\pi i k_j}{n}}. \tag{0.7}$$

Dalle note proprietà di $\underline{\log z}$, sappiamo che $(V_1, \log^1 z + 2\pi i k_1) \sim (V_2, \log^2 z + 2\pi i k_2)$. Dunque esisterà una catena di elementi di funzioni $(W_0, f_0(z)), \ldots, (W_m, f_m(z))$ tale che ogni elemento di funzione è in continuazione analitica diretta con il successivo e tale che $(W_0, f_0(z)) = (V_1, \log^1 z + 2\pi i k_1)$ e $(W_m, f_m(z)) = (V_2, \log^2 z + 2\pi i k_2)$. Allora la catena gli elementi di funzione $(W_0, e^{\frac{f_0(z)}{n}}), \ldots, (W_m, e^{\frac{f_m(z)}{n}})$ è tale che ogni elemento di funzione è in continuazione analitica diretta con il successivo e inoltre (0.7) implica che $(W_0, e^{\frac{f_0(z)}{n}}) = (V_1, \sqrt[n]{z}^1)$ e $(W_m, e^{\frac{f_m(z)}{n}}) = (V_2, \sqrt[n]{z}^2)$. Ciè mostra che $(V_1, \sqrt[n]{z}^1) \sim (V_2, \sqrt[n]{z}^2)$, q.e.d.

(ii) Siccome sappiamo che $\mathcal{D}(\underline{\log z}) = \mathbb{C}^*$, dal Lemma 2 del punto (i) deduciamo che $\mathbb{C}^* \subseteq \mathcal{D}(\underline{\sqrt[n]{z}})$. D'altra parte, dal Lemma 1 del punto (i) deduciamo che $\mathcal{D}(\underline{\sqrt[n]{z}}) \subseteq \mathbb{C}^*$. Dunque vale l'uguaglianza $\mathcal{D}(\underline{\sqrt[n]{z}}) = \mathbb{C}^*$.

(iii) Se $V \subseteq \mathbb{C}$ è semplicemente connesso, allora sappiamo che esiste un ramo $(V, \log z) \in \underline{\log z}$. Dunque, abbiamo che $(V, e^{\frac{\log z}{n}}) \in \underline{\sqrt[n]{z}}$ (vedi anche Lemma 2 del punto (i)).

(iv) Supponiamo per assurdo che esista $\sqrt[n]{z}$ su $\mathbb{C}^*$. Siccome $(\sqrt[n]{z})^n = z$ su $\mathbb{C}^*$ per definizione, allora passando ai gruppi fondamentali rispetto al punto base 1 si ha che la composizione

$$\pi_1(\mathbb{C}^*, 1) \xrightarrow{(\sqrt[n]{z})_*} \pi_1(\mathbb{C}^*, 1) \xrightarrow{(z^n)_*} \pi_1(\mathbb{C}^*, 1)$$

è l'identità. In particolare, la seconda mappa $(z^n)_*$ è suriettiva. Ricordiamo ora che $\pi_1(\mathbb{C}^*, 1) \cong \mathbb{Z}$ generato da un cappio γ intorno all'origine. La mappa $z \mapsto z^n$ manda γ in γ^{*n}, cioè γ composto n volte con se stesso. Dunque, dopo l'identificazione $\pi_1(\mathbb{C}^*, 1) \cong \mathbb{Z}$, la mappa $(z^n)_*$ è l'endomorfismo di $\mathbb{Z}$ dato dalla moltiplicazione per n, che non è suriettiva (perché $n \geq 2$), assurdo.