Nome candidato:
Numero di matricola:

APPELLO B DEL CORSO AC310
(MARTEDI 16 FEBBRAIO 2016)

Tutte le risposte vanno argomentate chiaramente.

ESERCIZIO 1 (6 punti)
Sia Ω un aperto di $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ e sia $f : \Omega \to \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ una funzione definita su Ω. Sia $z_0 = x_0 + iy_0 \in \Omega$ e supponiamo che f, vista come funzione reale, sia una funzione C^1 in (x_0, y_0) con differenziale $df_{(x_0,y_0)} : \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C} \to \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$. Dimostrare che f è olomorfa in z_0 se e solo se $df_{(x_0,y_0)}$ è un'applicazione $\mathbb{C}$-lineare.

ESERCIZIO 2 (6 punti)
Sia $U \subset \mathbb{C}$ un aperto semplicemente connesso e siano $z_1, \dots, z_n$ punti di U. Sia f una funzione olomorfa su $U^* := U \setminus \{z_1, \dots, z_n\}$. Per ogni $k = 1, \dots, n$, sia γ_k un cappio arbitrariamente piccolo intorno a z_k e sia

$$a_k := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_k} f(w)dw.$$

Dimostrare che la funzione olomorfa

$$h : U^* \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$z \mapsto h(z) := f(z) - \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{z - z_k}$$

ammette una primitiva su U^*.

ESERCIZIO 3 (6 punti)
Calcolare l'integrale

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2 - \sin\theta} d\theta$$

con il metodo dei residui.

ESERCIZIO 4 (teorico) (3 punti per ogni dimostrazione) Esporre le dimostrazioni che conosci del teorema fondamentale dell'algebra usando l'analisi complessa.

ESERCIZIO 5 (8 punti) Sia f una funzione meromorfa su $\mathbb{C}$. Supponiamo che esistano tre numeri complessi w_1, w_2 e w_3 linearmente indipendenti su $\mathbb{Q}$ e tale che

$$f(z + w_i) = f(z) \text{ per ogni } i = 1, 2, 3 \text{ e per ogni } z \in \mathbb{C}.$$

Dimostrare che f è costante.
[Suggerimento: Cominciare col dimostrare che 0 è un punto di accumulazione per il sottogruppo $\langle w_1, w_2, w_3 \rangle \subset \mathbb{C}$ generato dai tre elementi w_1, w_2, w_3. Come si conclude?]