

Nome candidato:  
Numero di matricola:

**APPELLO C DEL CORSO AC310**  
**28 GIUGNO 2016**

Tutte le risposte vanno argomentate chiaramente.

**ESERCIZIO 1** (6 punti) Per ogni numero complesso  $\alpha \in \mathbb{C}$  si consideri la serie di potenze formale

$$(1+T)^\alpha := \sum_{n \geq 0} \binom{\alpha}{n} T^n = 1 + \sum_{n \geq 1} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n(n-1)\cdots 1} T^n \in \mathbb{C}[[T]].$$

(i) (3 punti) Dimostrare che il raggio di convergenza  $R$  di  $(1+T)^\alpha$  è uguale a

$$R = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha \in \mathbb{N}, \\ 1 & \text{se } \alpha \notin \mathbb{N}. \end{cases}$$

(ii) (3 punti) Dimostrare che per ogni  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  vale la seguente identità tra serie di potenze formali

$$(0.1) \quad (1+T)^\alpha (1+T)^\beta = (1+T)^{\alpha+\beta}.$$

**ESERCIZIO 2 (teorico)** (10 punti)

- (i) Definire i vari tipi di singolarità isolate.
- (ii) Per ogni tipo di singolarità isolata, dare un esempio di una funzione avente quel tipo di singolarità isolata.
- (iii) Supponiamo che  $f$  abbia una singolarità isolata in  $z_0$ . Come riconoscere il tipo di singolarità di  $f$  in  $z_0$  guardando al limite  $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)|$ ? Giustificare la risposta.
- (iv) Enunciare e dimostrare il teorema di Riemann sulle singolarità rimuovibili (o apparenti).
- (v) Enunciare e dimostrare il teorema di Casorati-Weierstrass sulle singolarità essenziali.

**ESERCIZIO 3** (6 punti) Dimostrare che la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{z^2 + n^2}$$

definisce una funzione meromorfa su  $\mathbb{C}$  e determinare i suoi poli e i loro rispettivi ordini.

**ESERCIZIO 4** (6 punti) Calcolare l'integrale della funzione  $\frac{1+z}{1-e^z}$  lungo la circonferenza centrata nell'origine e di raggio 8.

**ESERCIZIO 5** (10 punti) Calcolare il gruppo di automorfismi del semipiano superiore

$$\mathbb{H} := \{z = x + iy \in \mathbb{C} : y > 0\}.$$

[Suggerimento: usare il biolomorfismo di  $\mathbb{H}$  con il disco unitario  $\mathbb{D}$ .]