Nome candidato:
Numero di matricola:

APPELLO LAUREANDI DEL CORSO AC310
2 FEBBRAIO 2017

ESERCIZIO 1 (5 punti)
Dimostrare che la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^2 + n^2}$$

definisce una funzione meromorfa su $\mathbb{C}$ e determinare i suoi poli e i rispettivi ordini.

ESERCIZIO 2 (5 punti)

Calcolare l'integrale della funzione $f(z) = \dfrac{z^2}{(z+1)(z-1)^2}$ lungo la circonferenza di raggio 1 e centro 1.

ESERCIZIO 3 (5 punti)

Trovare lo sviluppo in serie di potenze della funzione $f(z) = \dfrac{1}{1+z^2}$ nel punto 0 e discutere il raggio di convergenza di questa serie.

ESERCIZIO 4 (8 punti)
Sia U un aperto connesso contenuto in $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Dimostrare che le seguenti condizioni sono equivalenti:

(i) U è semplicemente connesso.
(ii) Esiste un logaritmo su U (cioè una funzione olomorfa $\log : U \to \mathbb{C}$ tale che $e^{\log(z)} = z$ per ogni $z \in U$).
(iii) Esiste una primitiva della funzione $1/z$ su U.

ESERCIZIO 5 (teorico) (3 punti per ogni dimostrazione)
Esporre le dimostrazioni che conosci del teorema fondamentale dell'algebra usando l'analisi complessa.