APPELLO X DEL CORSO AC310
(1 SETTEMBRE 2016)

ESERCIZIO 1 (5 punti)

Calcolare l'integrale della funzione $f(z) = \dfrac{1+z}{1-\sin z}$ lungo la circonferenza di raggio 8 e centro l'origine.

ESERCIZIO 2 (6 punti)

(i) Trovare l'espansione in serie di Laurent della funzione $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)^2(z+1)^2}$ nella corona circolare $1 < |z| < 2$.

(ii) Qual è il più grande aperto di convergenza della serie di Laurent trovata nel punto precedente?

ESERCIZIO 3 (8 punti) Sia f una funzione meromorfa su $\mathbb{C}$ tale che

$$\lim_{|z|\to+\infty} |f(z)| = +\infty.$$

Dimostrare che f è una funzione razionale.

ESERCIZIO 4 (8 punti) Sia U un aperto connesso contenuto in $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

(i) Dimostrare che se esiste un logaritmo su U (cioè una funzione olomorfa $\log : U \to \mathbb{C}$ tale che $e^{\log(z)} = z$ per ogni $z \in U$) allora U è semplicemente connesso.

(ii) Dimostrare che se U è semplicemente connesso allora esiste una primitiva $F : U \to \mathbb{C}$ della funzione $1/z$ su U.

(iii) Dimostrare che se esiste una primitiva della funzione $1/z$ su U allora esiste un logaritmo su U.

ESERCIZIO 5 (teorico) (8 punti)

(i) (4 punti) Calcolare il gruppo degli automorfismi di $\mathbb{C}$ (con dimostrazione).

(ii) (4 punti) Calcolare il gruppo degli automorfismi di $\mathbb{D}$, dove $\mathbb{D}$ è il disco unitario di $\mathbb{C}$ (con dimostrazione).