Nome candidato:
Numero di matricola:

PRIMA PROVA IN ITINERE DEL CORSO AC310
11 NOVEMBRE 2015

Tutte le risposte vanno argomentate chiaramente.

ESERCIZIO 1 (6 punti)
Sia $\sum f : U \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa con U aperto connesso di $\mathbb{C}$. Dimostrare che se l'immagine di f è contenuta in $\mathbb{R}$ allora f è costante.
[Suggerimento: Usare le equazioni di Cauchy-Riemann.]

ESERCIZIO 2 (12 punti)
Si consideri la serie $F(T) := \sum_n \frac{T^n}{n^2} \in \mathbb{C}[[T]]$.

(i) (4 punti) Dimostrare che il raggio di convergenza di $F(T)$ è 1.
(ii) (4 punti) Dimostrare che F converge ad una funzione continua f sulla chiusura del disco unitario $\overline{D_1(0)} = \{z \in \mathbb{C} \,:\, |z| \leq 1\}$.
(iii) (4 punti) Dimostrare che esiste almeno un punto del bordo del disco unitario dove f non è olomorfa.

ESERCIZIO 3 (12 punti)
Sia U un aperto connesso di $\mathbb{C}$ e sia $f : U \to \mathbb{C}$ *un logaritmo complesso* su U, cioè una funzione olomorfa su U tale che $e^{f(z)} = z$ per ogni $z \in U$.

(i) (4 punti) Dimostrare che $f'(z) = \frac{1}{z}$ per ogni $z \in U$.
(ii) (4 punti) Dimostrare che se $g : U \to \mathbb{C}$ è un altro logaritmo complesso su U allora esiste un numero intero k tale che $g(z) = f(z) + 2\pi i k$ per ogni $z \in U$.
(iii) (4 punti) Dimostrare che se $U = \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ allora non esiste nessun logaritmo complesso su U.

ESERCIZIO 4 (teorico) (8 punti) Enunciare e dimostrare il teorema di esistenza locale di una primitiva per una funzione olomorfa.