Nome candidato:
Numero di matricola:

SECONDA PROVA IN ITINERE DEL CORSO AC310
12 GENNAIO 2016

Tutte le risposte vanno argomentate chiaramente.

ESERCIZIO 1 (8 punti)
Dimostrare che la serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(z+n)^2}$$
definisce una funzione meromorfa su $\mathbb{C}$ e determinare i suoi poli e i rispettivi ordini.

ESERCIZIO 2 (teorico) (8 punti)
Enunciare e dimostrare il teorema dei residui, sia nella versione locale che in quella globale (assumendo il teorema dei Cauchy sull'invarianza omologica).

ESERCIZIO 3 (8 punti)
Siano $z^1 = (z_0^1 : z_1^1)$, $z^2 = (z_0^2 : z_1^2)$ e $z^3 = (z_0^3 : z_1^3)$ tre punti distinti di $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$. Dimostrare che esiste un'unica trasformazione lineare fratta $F \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}) \cong \mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ tale che $F(z^1) = (0:1)$, $F(z^2) = (1:0)$ e $F(z^3) = (1:1)$.

ESERCIZIO 4 (12 punti)
Sia $\Lambda \subset \mathbb{C}$ un reticolo e siano $\mathfrak{p}_\Lambda(z)$ la funzione di Weierstrass associata a Λ e $\mathfrak{p}'_\Lambda(z)$ la sua derivata. Per ogni intero $r > 2$, sia $G_r(\Lambda) := \sum_{0 \neq \omega \in \Lambda} \frac{1}{\omega^r} \in \mathbb{C}$. Dimostrare che l'applicazione
$$\Phi : \frac{\mathbb{C}}{\Lambda} - \{[0]\} \longrightarrow \mathcal{C}_\Lambda := \{(x,y) \in \mathbb{C}^2 : y^2 = 4x^3 - 60G_4(\Lambda)x - 140G_6(\Lambda)\}$$
$$[z] \mapsto (\mathfrak{p}_\Lambda(z), \mathfrak{p}'_\Lambda(z)),$$
è ben definita, iniettiva e suriettiva.
[Suggerimento: Utilizzare le proprietà di $\mathfrak{p}_\Lambda(z)$ e $\mathfrak{p}'_\Lambda(z)$ viste a lezione...]