SOLUZIONI APPELLO A DEL CORSO AC310
27 GENNAIO 2016

ESERCIZIO 1 (8 punti)

Consideriamo la serie di potenze $f(T) := \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{T^n}{n}$.

(i) Calcolare il raggio di convergenza della serie $f(T)$.

(ii) Per ogni $w \in \mathbb{C}^*$ e ogni $\alpha \in \mathbb{C}$, si consideri la funzione

$$L(z) := \alpha + f\left(\frac{z-w}{w}\right).$$

Dire qual è il dominio di definizione U di L e dimostrare che $L'(z) = 1/z$ per ogni $z \in U$.

(iii) Dire per quali valori di w e α si ha che $e^{L(z)} = z$ per ogni $z \in U$.

Soluzione:

(1) Il raggio di convergenza è 1. Si veda Esempio nel Capitolo II.3, pagina 67, del libro di Lang.

(2) U è il disco di centro w e raggio $|w|$.
Si veda Esercizio 6 del Capitolo II.5 del libro del Lang e la sua soluzione nel libro di Shakarchi.

(3) Risposta: per tutti i valori di $w \in \mathbb{C}^*$ e $\alpha \in \mathbb{C}$ tali che $e^\alpha = w$. Si combini l'Esercizio 1 del Capitolo II.3 con l'Esempio a pagina 120-121 del Capitolo III.6 del libro di Lang.

ESERCIZIO 2 (8 punti)

Dimostrare che una funzione olomorfa intera $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ non costante ha immagine densa.

[Suggerimento di una possibile soluzione (ma ci sono anche altre soluzioni possibili): considerare lo sviluppo in serie di f in 0 e distinguire due casi a seconda che ci sia un numero infinito o finito di termini non nulli. Nel primo caso considerare la funzione $g(z) = f(1/z)$....e nel secondo caso?]

Soluzione: Si veda l'esercizio 6 del Capitolo V.3 del libro del Lang e le due soluzioni nel libro di Shakarchi.

ESERCIZIO 3 (6 punti)

Calcolare l'integrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^n} dx$ per ogni intero $n \geq 2$.

[Suggerimento: Per $R \gg 0$, considerare l'integrale di $\frac{1}{1+z^n}$ lungo la curva composta dal segmento da 0 a R, dall'arco di circonferenza di centro 0 da R a $Re^{2\pi i/n}$ e dal segmento da $Re^{2\pi i/n}$ a 0....]

Soluzione: La risposta è $\frac{\pi/n}{\sin(\pi/n)}$. Si veda l'esercizio 1(b) del Capitolo VI.2 del libro del Lang e la sua soluzione nel libro di Shakarchi.

ESERCIZIO 4 (6 punti)

Dimostrare che il gruppo $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ delle trasformazioni lineari fratte è generato dalle seguenti trasformazioni:

(i) $T_b(z) = z + b$ (traslazione per $b \in \mathbb{C}$);
(ii) $J(z) = 1/z$ (inversione);
(iii) $M_a(z) = az$ (moltiplicazione per $a \in \mathbb{C}^*$).

Soluzione: Si veda il libro di Lang, Capitolo VII, Teorema 5.1.

ESERCIZIO 5 (teorico) (10 punti)

Sia $\Lambda \subset \mathbb{C}$ un reticolo e siano $\mathfrak{p}_\Lambda(z)$ la funzione di Weierstrass associata a Λ e $\mathfrak{p}'_\Lambda(z)$ la sua derivata. Per ogni intero $r > 2$, sia $G_r(\Lambda) := \sum_{0 \neq \omega \in \Lambda} \frac{1}{\omega^r} \in \mathbb{C}$. Dimostrare che:

(a) Le funzioni $\mathfrak{p}_\Lambda(z)$ e $\mathfrak{p}'_\Lambda(z)$ soddisfano la relazione
$$\mathfrak{p}'_\Lambda(z)^2 = 4\mathfrak{p}_\Lambda(z)^3 - 60G_4(\Lambda)\mathfrak{p}_\Lambda(z) - 140G_6(\Lambda).$$
(b) Ogni funzione ellittica rispetto a Λ si scrive come funzione razionale in $\mathfrak{p}_\Lambda(z)$ e $\mathfrak{p}'_\Lambda(z)$.

Soluzione:

(a) Si veda Lang, Capitolo XIV, Teorema 2.3.
(b) Si veda Lang, Capitolo XIV, Teorema 2.2.