SOLUZIONI APPELLO B DEL CORSO AC310 (MARTEDI 16 FEBBRAIO 2016)

ESERCIZIO 1 (6 punti)

Sia Ω un aperto di $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ e sia $f : \Omega \to \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ una funzione definita su Ω. Sia $z_0 = x_0 + iy_0 \in \Omega$ e supponiamo che f, vista come funzione reale, sia una funzione C^1 in (x_0, y_0) con differenziale $df_{(x_0,y_0)} : \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C} \to \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$. Dimostrare che f è olomorfa in z_0 se e solo se $df_{(x_0,y_0)}$ è un'applicazione $\mathbb{C}$-lineare.

Soluzione: Ricordiamo che il differenziale di $f(z) = (u(x, y), v(x, y))$ in (x_0, y_0) è rappresentato, rispetto alle base canonica di $\mathbb{R}^2$, dalla matrice Jacobiana

$$df_{(x_0,y_0)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix}. \tag{0.1}$$

Per definizione, $df_{(x_0,y_0)}$ è $\mathbb{R}$-lineare. Affinché $df_{(x_0,y_0)}$ sia $\mathbb{C}$-lineare è necessario e sufficiente che esso commuti con l'automorfismo lineare J di $\mathbb{R}^2$ dato dalla moltiplicazione per i. Usando l'identificazione canonica $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ data dal mandare (x, y) in $x + iy$, l'endomorfismo J agisce come

$$J((x, y)) = i(x + iy) = -y + ix = (-y, x).$$

In altre parole, J è rappresentato, rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^2$, dalla matrice

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{0.2}$$

Dunque, il differenziale $df_{(x_0,y_0)}$ è $\mathbb{C}$-lineare se e solo se le matrici (0.1) e (0.2) commutano, il che si traduce nelle equazioni:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \dfrac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0), \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\dfrac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0). \end{cases} \tag{0.3}$$

Queste sono esattamente le equazioni di Cauchy-Riemann e sappiamo che esse sono soddisfatte se e solo se f è olomorfa in $z_0 = x_0 + iy_0$, q.e.d.

ESERCIZIO 2 (6 punti)

Sia $U \subset \mathbb{C}$ un aperto semplicemente connesso e siano $z_1, \dots, z_n$ punti di U. Sia f una funzione olomorfa su $U^* := U \setminus \{z_1, \dots, z_n\}$. Per ogni $k = 1, \dots, n$, sia γ_k un cappio arbitrariamente piccolo intorno a z_k e sia

$$a_k := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_k} f(w)dw.$$

Dimostrare che la funzione olomorfa

$$h : U^* \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$z \mapsto h(z) := f(z) - \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{z - z_k}$$

ammette una primitiva su U^*.

Soluzione: Si veda Esercizio IV.2.3 del libro di Lang e la sua soluzione nel libro di Shakarchi.

ESERCIZIO 3 (6 punti)
Calcolare l'integrale

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2-\sin\theta} d\theta$$

con il metodo dei residui.

Soluzione: La risposta è $2\pi/\sqrt{3}$. Si veda Esercizio VI.2.22 del libro di Lang e la sua soluzione nel libro di Shakarchi.

ESERCIZIO 4 (teorico) (3 punti per ogni dimostrazione) Esporre le dimostrazioni che conosci del teorema fondamentale dell'algebra usando l'analisi complessa.

Soluzione: Si può usare:

(1) Principio del Massimo Modulo, vedi Lang, Capitolo II, Teorema 7.3.
(2) Teorema di Liouville, vedi Lang, Capitolo III, Corollario 7.6.
(3) Teorema di Roché, vedi Lang, Esercizio VI.1.33 e sua soluzione del libro di Shakarchi.
(4) Principio dell'argomento. Ecco la soluzione (vista a lezione):

Sia C_R la circonferenza di raggio R centrata in 0 e sia $P(z) \in \mathbb{C}[z]$ un polinomio di grado $n \geq 1$. Parametrizziamo la circonferenza C_R tramite la funzione

$$\gamma_R : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$t \mapsto Re^{2\pi i t}.$$

Allora, dalla definizione di integrale curvilineo, otteniamo che (per ogni $R > 0$)

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_R} \frac{n}{z} dz = \frac{1}{2\pi i}\int_0^1 \frac{n(Re^{2\pi i t})'}{Re^{2\pi i t}} dt = \int_0^1 n \cdot dt = n. \tag{0.4}$$

Scriviamo ora il polinomio $P(z)$ come $P(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ con $a_n \neq 0$. Allora abbiamo che

$$\frac{P'(z)}{P(z)} - \frac{n}{z} = \frac{zP'(z) - nP(z)}{zP(z)} = \frac{z(\sum_{k=0}^n a_k k z^{k-1}) - n(\sum_{k=0}^n a_k z^k)}{zP(z)} = \frac{\sum_{k=0}^n a_k (k-n) z^k}{zP(z)} =$$

$$= \frac{\sum_{k=0}^{n-1} a_k (k-n) z^k}{\sum_{k=0}^n a_k z^{k+1}}.$$

Dunque la funzione razionale $\frac{P'(z)}{P(z)} - \frac{n}{z}$ è quoziente di un polinomio di grado $n-1$ per un polinomio di grado $n+1$. Da ciò si evince che esiste una constante $C > 0$ e un numero $R_0 > 0$ tali che

$$\left|\frac{P'(z)}{P(z)} - \frac{n}{z}\right| \leq \frac{C}{R^2} \text{ per ogni } z \in C_R \text{ con } R \geq R_0.$$

Quindi, siccome la circonferenza C_R ha lunghezza $2\pi R$, abbiamo la stima (per $R \geq R_0$)

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{C_R} \left(\frac{P'(z)}{P(z)} - \frac{n}{z}\right) dz\right| \leq R \sup_{z \in C_R} \left|\frac{P'(z)}{P(z)} - \frac{n}{z}\right| \leq \frac{C}{R} \xrightarrow{R \to +\infty} 0. \tag{0.5}$$

Combinando (0.4) e (0.5) e tenendo presente che $\frac{1}{2\pi i}\int_{C_R}\frac{P'(z)}{P(z)}$ è un numero naturale uguale al numero di zeri (contati con molteplicità) di $P(z)$ all'interno di C_R per il principio dell'argomento (in quanto $P(z)$ è una funzione olomorfa su $\mathbb{C}$), otteniamo che:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_R}\frac{P'(z)}{P(z)} = n \text{ per } R \gg 0.$$

Per il principio dell'argomento, ne deduciamo che $P(z)$ ha n radici (contate con la molteplicità) su $\mathbb{C}$, che è esattamente il teorema fondamentale dell'algebra.

ESERCIZIO 5 (8 punti) Sia f una funzione meromorfa su $\mathbb{C}$. Supponiamo che esistano tre numeri complessi w_1, w_2 e w_3 linearmente indipendenti su $\mathbb{Q}$ e tale che

$$f(z + w_i) = f(z) \text{ per ogni } i = 1, 2, 3 \text{ e per ogni } z \in \mathbb{C}.$$

Dimostrare che f è costante.

[Suggerimento: Cominciare col dimostrare che 0 è un punto di accumulazione per il sottogruppo $\langle w_1, w_2, w_3\rangle \subset \mathbb{C}$ generato dai tre elementi w_1, w_2, w_3. Come si conclude?]

Soluzione: Si veda Esercizio V.3.8 del libro di Lang e la sua soluzione nel libro di Shakarchi.

NOTA: In realtà, bastava far vedere che c'era un punto di accumulazione (anche diverso da 0 (cosa che avevamo visto a lezione), e poi si concludeva allo stesso modo.