# SOLUZIONI APPELLO C DEL CORSO AC310
# (28 GIUGNO 2016)

**ESERCIZIO 1** (6 punti) Per ogni numero complesso $\alpha \in \mathbb{C}$ si consideri la serie di potenze formale

$$(1+T)^{\alpha} := \sum_{n\geq 0} \binom{\alpha}{n} T^n = 1 + \sum_{n\geq 1} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n(n-1)\cdots 1} T^n \in \mathbb{C}[[T]].$$

(i) (3 punti) Dimostrare che il raggio di convergenza $R$ di $(1+T)^{\alpha}$ è uguale a

$$R = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha \in \mathbb{N}, \\ 1 & \text{se } \alpha \notin \mathbb{N}. \end{cases}$$

(ii) (3 punti) Dimostrare che per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ vale la seguente identità tra serie di potenze formali

$$(1+T)^{\alpha}(1+T)^{\beta} = (1+T)^{\alpha+\beta}. \tag{0.1}$$

**Soluzione:**

(i) Se $\alpha \in \mathbb{N}$, allora $\binom{\alpha}{n} = 0$ per ogni $n > \alpha$; dunque la serie che definisce $(1+T)^{\alpha}$ è un polinomio e quindi ha raggio di convergenza infinito. Se invece $\alpha \notin \mathbb{N}$, allora $\binom{\alpha}{n} \neq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e abbiamo che

$$\left| \frac{\binom{\alpha}{n}}{\binom{\alpha}{n+1}} \right| = \left| \frac{n+1}{\alpha - n} \right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

Dunque per il criterio del rapporto si ha che

$$\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left| \binom{\alpha}{n} \right|} = 1,$$

e quindi il raggio di convergenza è 1 per il criterio della radice.

(ii) Se $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, sappiamo dall'analisi reale che

$$(1+x)^{\alpha}(1+x)^{\beta} = (1+x)^{\alpha+\beta} \text{ per ogni } x \in \mathbb{R} \text{ tale che } |x| < 1.$$

Dunque, per il principio di identità di serie convergenti, deduciamo che vale l'identit di serie formali (0.1).

**ESERCIZIO 2 (teorico)** (10 punti)

(i) Definire i vari tipi di singolarità isolate.
(ii) Per ogni tipo di singolarità isolata, dare un esempio di una funzione avente quel tipo di singolarità isolata.
(iii) Supponiamo che $f$ abbia una singolarità isolata in $z_0$. Come riconoscere il tipo di singolarità di $f$ in $z_0$ guardando al limite $\lim_{z\to z_0}|f(z)|$? Giustificare la risposta.
(iv) Enunciare e dimostrare il teorema di Riemann sulle singolarità rimuovibili (o apparenti).
(v) Enunciare e dimostrare il teorema di Casorati-Weiestrass sulle singolarità essenziali.

**ESERCIZIO 3** (6 punti) Dimostrare che la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{z^2 + n^2}$$

definisce una funzione meromorfa su $\mathbb{C}$ e determinare i suoi poli e i loro rispettivi ordini.

**Soluzione:**
Si veda Esercizio V.3.1(b) del libro di Lang e la soluzione nel libro di Shakarchi.

**ESERCIZIO 4** (6 punti) Calcolare l'integrale della funzione $\frac{1+z}{1-e^z}$ lungo la circonferenza centrata nell'origine e di raggio 8.

**Soluzione:**
Si veda Esercizio VI.1.26(c) del libro di Lang e la soluzione nel libro di Shakarchi.

**ESERCIZIO 5** (10 punti) Calcolare il gruppo di automorfismi del semipiano superiore

$$\mathbb{H} := \{z = x + iy \in \mathbb{C} \ : \ y > 0\}.$$

[Suggerimento: usare il biolomorfismo di $\mathbb{H}$ con il disco unitario $\mathbb{D}$.]

**Soluzione:**
Il gruppo dei biolomorfismi di $\mathbb{H}$ è

$$\mathrm{PGL}_2(\mathbb{R}) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})/\pm 1.$$

Per la dimostrazione, si vedano gli esercizi Esercizio VI.3.1-2-3 del libro di Lang e la loro soluzione nel libro di Shakarchi oppure si vedano le ultime esercitazioni svolte dal dott. Fabio Felici.